

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

CONSTANTIN IONESCU

**PROBLEME REZOLVATE- DINAMICA
CONSTRUCȚIILOR**

IAȘI, 2004

CUPRINS

P.1 Probleme rezolvate. Sisteme cu 1 GLD – vibrații libere

P.2 Probleme rezolvate. Sisteme cu 1 GLD – vibrații forțate

P.3 Probleme propuse pentru rezolvare. Sisteme cu 1GLD – vibrații libere și forțate

P.4 Probleme rezolvate. Sisteme cu n GLD – vibrații libere

P.5 Probleme rezolvate. Sisteme cu n GLD – vibrații forțate

P.6 Probleme propuse pentru rezolvare. Sisteme cu n GLD – vibrații libere și forțate

B. Bibliografie

PROBLEME REZOLVATE 1

SISTEME CU 1 GLD – VIBRAȚII LIBERE

Problema 1.1

Să se calculeze pulsația, perioada și frecvența proprie de vibrație pentru următoarele sisteme dinamice.

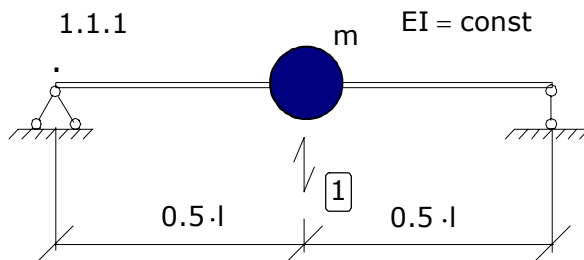


Fig.1.1

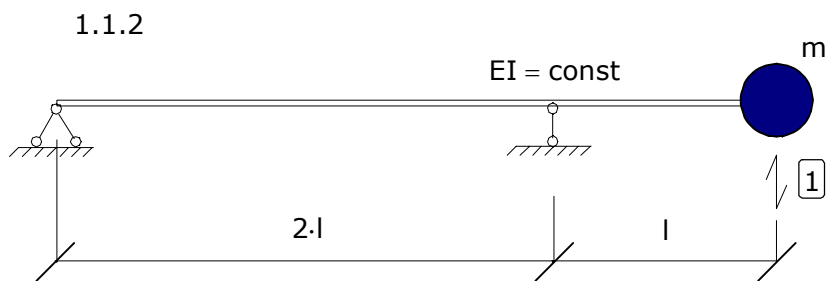


Fig.1.22

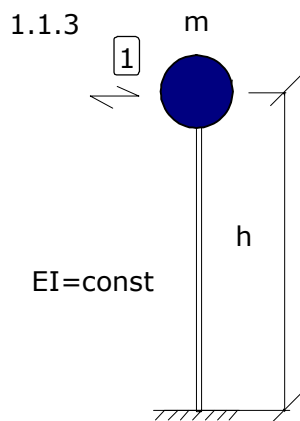


Fig.1.3

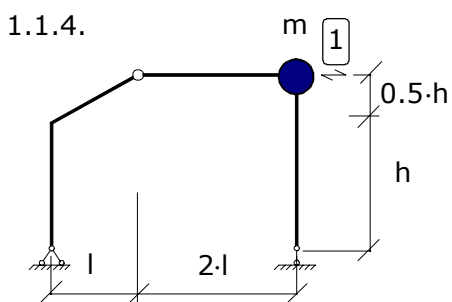


Fig.1.4

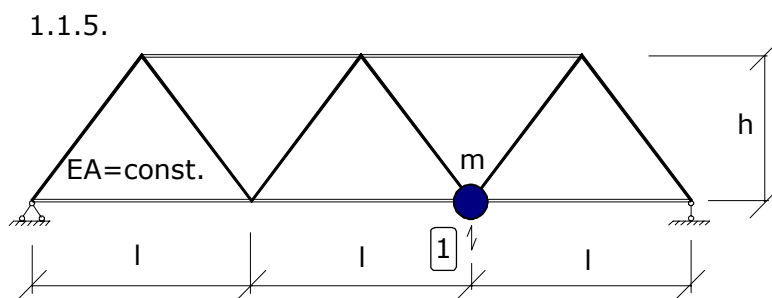


Fig. 1.5

Tabelul 1.1. Date numerice

Nr. apl.	E (Nm ⁻²)	I (m ⁴)	A (m ²)	l (m)	h (m)	m (kg)		F ₀	Obs.
1.1.1.	2.1·10 ¹¹	5·10 ⁻⁵	0.375·10 ⁻¹	5.0	-	4·10 ⁻³		10 ⁴	G=0.4E EI=c
1.1.2.	2.1·10 ¹¹	5·10 ⁻⁵	-	5.0	-	4·10 ⁻³		10 ⁴	EI=c
1.1.3.	2.1·10 ¹¹	5·10 ⁻⁵	0.25·10 ⁻¹	-	3.5	4·10 ⁻³		10 ⁴	G=0.4E EI=c
1.1.4.	2.1·10 ¹¹	5·10 ⁻⁵	-	5.0	3.5	4·10 ⁻³		10 ⁴	EI=c
1.1.5.	2.1·10 ¹¹	5·10 ⁻⁵	0.375·10 ⁻¹	5.0	3.5	4·10 ⁻³		10 ⁴	EI=c
1.2.1.	2.1·10 ¹¹	5·10 ⁻⁵	-	5.0	-	4·10 ⁻³		10 ⁴	EI=c
1.2.2.	2.1·10 ¹¹	5·10 ⁻⁵	-	5.0	-	4·10 ⁻³		10 ⁴	EI=c
1.2.3.	2.1·10 ¹¹	5·10 ⁻⁵	-	5.0	-	4·10 ⁻³		10 ⁴	EI=c
1.2.4.	2.1·10 ¹¹	5·10 ⁻⁵	-	5.0	-	4·10 ⁻³		10 ⁴	EI=c
1.2.5.	2.1·10 ¹¹	5·10 ⁻⁵	-	5.0	3.5	4·10 ⁻³		10 ⁴	EI=c

Breviar teoretic

1. Sistem vibrant, SV

Sistemul vibrant este constituit din următoarele mărimi:

- o caracteristica inerțială, masa m[kg];
- o caracteristica disipativă, coeficientul de amortizare vâscoasă c [kgs⁻¹];

caracteristica elastică, coeficientul de flexibilitate δ [mN⁻¹] sau coeficientul de rigiditate k[Nm⁻¹].

2. Flexibilitate, δ

Flexibilitatea reprezintă deplasarea măsurată pe direcția GLD la structura acționată în dreptul masei și pe direcția GLD de o forță egală cu unitatea. Flexibilitatea se calculează cu relația Mohr - Maxwell:

$$\delta = \sum \int \frac{\bar{M}(x) \cdot M(x)}{EI} dx + \sum K \int \frac{\bar{T}(x) \cdot T(x)}{GA} dx + \sum \int \frac{\bar{N}(x) \cdot N(x)}{EA} dx \quad (1.1)$$

prin integrarea diagramelor de eforturi M, N, T, trasate în starea reală, SR, de acționare a structurii (o forță egală cu unitatea aplicată în dreptul masei și pe direcția GLD) și a diagramelor de eforturi M, N, T, trasate în starea virtuală, SV, de acționare a structurii (o forță egală cu unitatea aplicat în dreptul secțiunii și pe direcția de determinare a deplasării).

3. Rigiditate, k

Rigiditatea reprezintă forța care acționând structura considerată în dreptul masei și pe direcția GLD produce pe acea direcție o deplasare egală cu unitatea. Rigiditatea se poate determina și prin inversarea flexibilității:

$$K = \frac{1}{\delta} \quad (1.2)$$

Rigiditatea se definește și ca reacțiunea din blocajul introdus pe direcția GLD, în structura dată și în care se produce o cedare egală cu unitatea. Conform acestei definiții, rigiditatea se poate calcula prin metodele Staticii Construcțiilor.

4. Forțe

Forțele care participă la echilibrul dinamic instantaneu, în cazul vibrațiilor libere neamortizate ale unui SV, sunt:

- forța de inerție,

$$F_i(t) = -m\ddot{x}(t); \quad (1.3)$$

- forța elastică,

$$F_e(t) = kx(t); \quad (1.4)$$

în care:

$x(t)$ reprezintă deplasarea măsurată pe direcția GLD;

$\ddot{x}(t)$ reprezintă accelerația sistemului.

5. Ecuația de echilibru

Echilibrul dinamic instantaneu se exprimă prin aplicarea principiului lui d'Alambert:

$$-F_i(t) + F_e(t) = 0 \quad (1.5)$$

sau

$$-m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

Soluția ecuației de mișcare de mai sus are forma:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.6)$$

în care:

$$A = \sqrt{\left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2}$$

reprezintă amplitudinea mișcării;

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_0 \omega}{V_0}$$

apreciază faza inițială a oscilației (φ).

Condițiile inițiale sunt: x_0 și V_0 (deplasarea și viteza la timpul $t=0$).

6. Pulsația proprie, ω

Pulsația proprie reprezintă numărul de vibrații complete efectuate de un SV în timp de 2π secunde. Pentru calculul pulsației proprii se utilizează relația:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{\sqrt{m\delta}} \quad [\text{rad s}^{-1}] \quad (1.7)$$

7. *Perioada proprie, T. Frecvența proprie, f.*

Pentru determinarea perioadei proprii și frecvenței proprii se utilizează relațiile:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} [\text{s}]$$

și

$$f = \frac{1}{T} [\text{s}^{-1}], [\text{Hz}] \quad (1.8)$$

Aplicații

Aplicația 1.1

1. Trasarea diagramelor de eforturi

Se constituie cele două stări de acționare: starea reală (SR) prin încărcarea sistemului oscilant în dreptul masei și pe direcția GLD cu o forță egală cu unitatea și starea virtuală (SV) prin încărcarea sistemului cu o forță egală cu unitatea în secțiunea și pe direcția pentru care se determină deplasarea δ . Diagramele de eforturi se trasează utilizând metodele din Statica Construcțiilor.

2. Calculul flexibilității, δ

Coeficientul de flexibilitate, δ , se determină prin integrarea diagramelor de eforturi:

$$\delta^{(M)} = \sum \int \frac{\bar{M}(x) \cdot M(x)}{EI} dx = 2 \frac{1}{EI} \cdot \frac{l/2}{3} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{4} = \frac{l^3}{48EI}$$

$$\delta^{(T)} = \sum k \int \frac{\bar{T}(x) \cdot T(x)}{GA} dx = 2k \frac{1}{GA} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = k \frac{l}{4GA}$$

$$\delta = \delta^{(M)} + \delta^{(T)} = \frac{l^3}{48EI} + k \frac{l}{4GA}$$

3. Determinarea pulsației proprii, ω

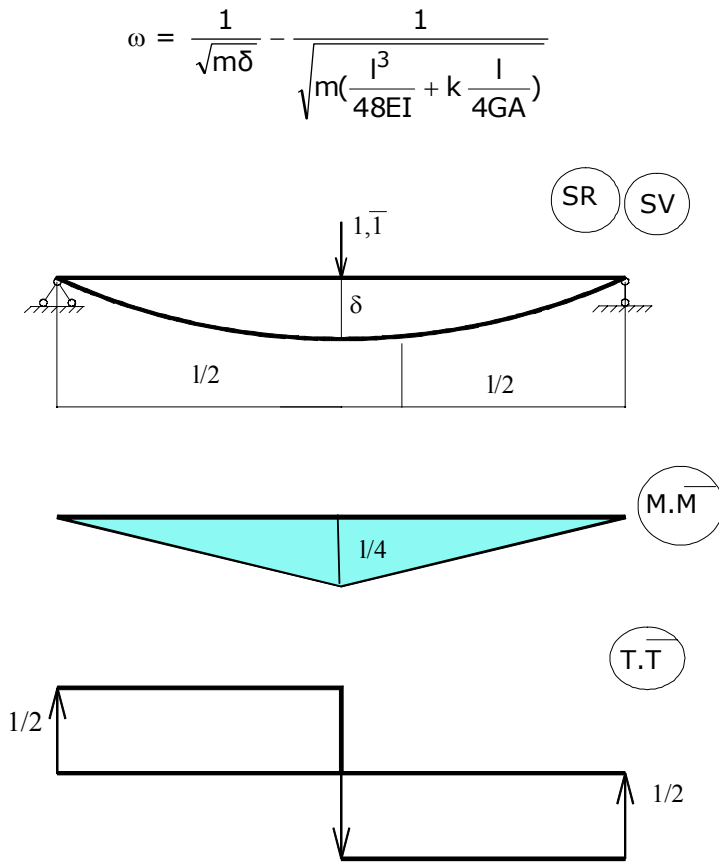


Fig.1.6

Înlocuind datele numerice din tabelul 1.1 în relațiile de mai sus rezultă:

$$\begin{aligned}\delta^{(M)} &= 2,480159 \cdot 10^{-7} \text{ (mN}^{-1}\text{)}, \\ \delta^{(T)} &= 4,7619048 \cdot 10^{-10} \text{ (mN}^{-1}\text{)}, \\ \omega^{(M+T)} &= 31,71858 \text{ (rad.s}^{-1}\text{)}, \\ \omega^{(M)} &= 31,749016 \text{ (rad.s}^{-1}\text{)}.\end{aligned}$$

4. Calculul perioadei și frecvenței:

$$T = \frac{2\pi}{\omega^{(M)}} = 0,1979 \text{ (s)},$$

$$f = \frac{1}{T} = 5,053 \text{ (s}^{-1}\text{)}.$$

Aplicația 1.2.

1. Trasarea diagramelor de eforturi M și $\bar{M}$

Diagramele de eforturi în cele două stări de încărcare (SR și SV) sunt prezentate în figura 1.7

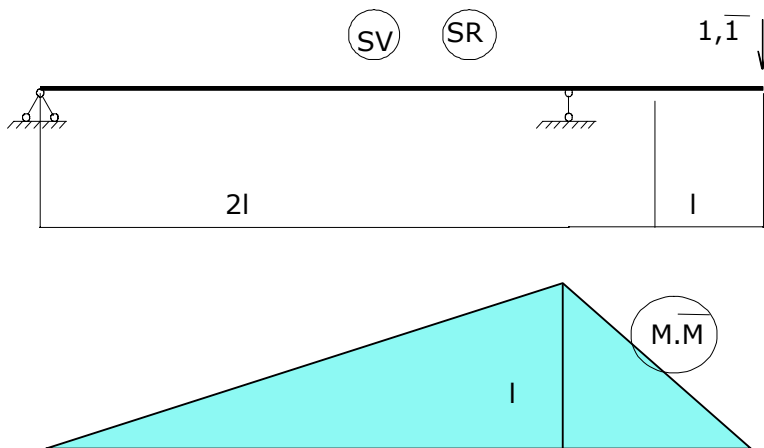


Fig.1.7

2. Calculul flexibilității, δ

Integrând diagramele de momente, figura 1.8 se obține valoarea coeficientului de flexibilitate:

$$\delta = \sum \int \frac{\bar{M}(x) \cdot M(x)}{EI} dx = \frac{2l}{3EI} l \cdot l + \frac{l}{3EI} l \cdot l = \frac{l^3}{EI}$$

3 și 4. Determinarea caracteristicilor dinamice, ω , T și f

Pulsația proprie se determină cu relația:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta}} = \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

și prin aplicarea datelor numerice din tabelul 1.1 rezultă:

$$\delta = 1,1904761 \cdot 10^{-5} (\text{mN}^{-1}), \omega = 4,58257 (\text{rad.s}^{-1})$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,3711 (\text{s}), f = \frac{1}{T} = 0,7293 \text{s}^{-1}.$$

Aplicația 1.3

1. Trasarea diagramelor de eforturi, M și $\bar{M}$

În figura 1.6 sunt trasate cele două diagrame de eforturi.

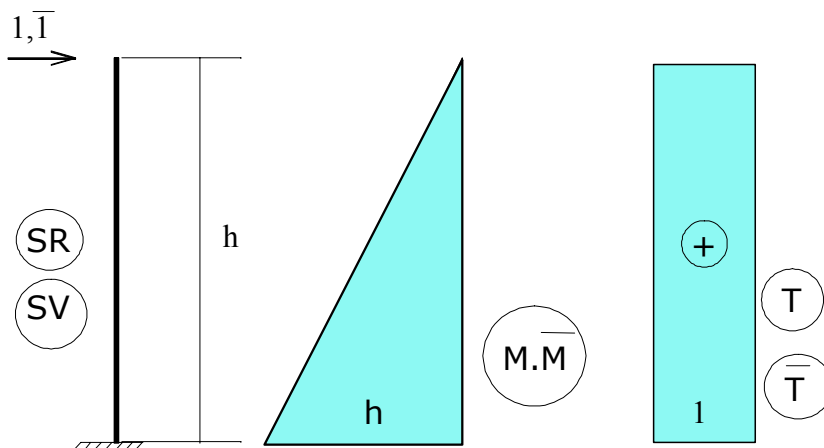


Fig.1.8

2. Calculul flexibilității, δ

Integrând diagramele de eforturi obținem mărirea coeficientului de flexibilitate:

$$\delta = \frac{h^3}{3EI} + k \frac{h}{GA}$$

și utilizând datele numerice din tabelul 1.1, rezultă:

$$\delta = 1,36244 \cdot 10^{-6} \text{ (mN}^{-1}\text{)}.$$

3 și 4. Determinarea caracteristicilor dinamice, ω , T și f

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta}} = 13,546 \text{ (rad s}^{-1}\text{)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,4628 \text{ (s)} \quad f = \frac{1}{T} = 2,1559 \text{ (s}^{-1}\text{)}.$$

Aplicația 1.4

1. Trasarea diagramelor de eforturi, figura 1.9

nodul 1:

$$\begin{cases} \sum x = 0; N_{12} \cos \alpha + N_{13} = 0 \\ \sum y = 0; \frac{1}{3} + N_{12} \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

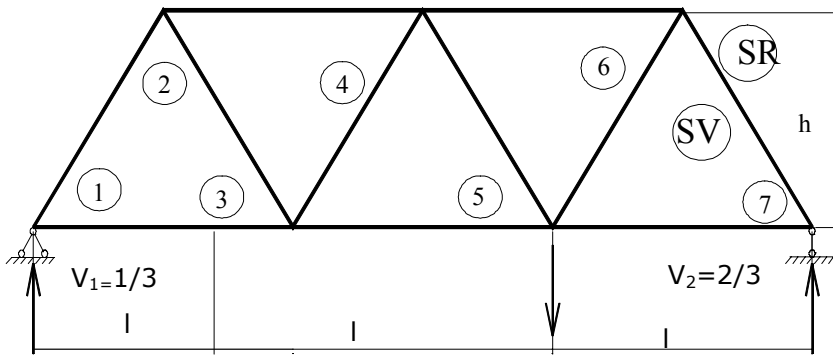


Fig. 1.10

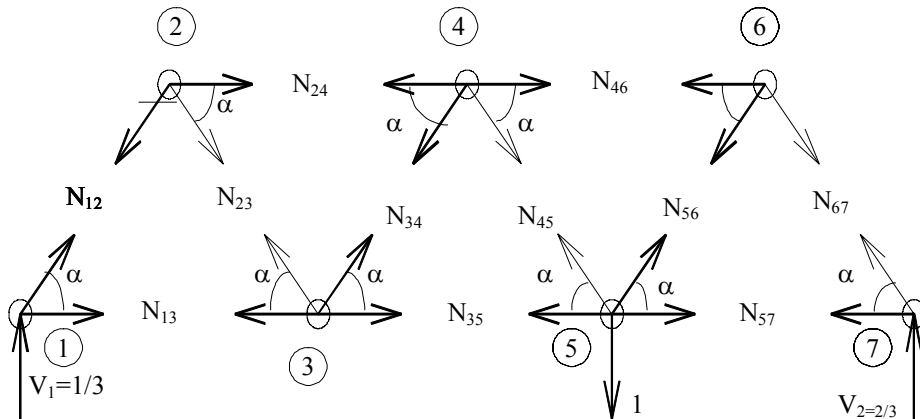


Fig.11

nodul 2:

$$\begin{cases} \sum x = 0; \\ \sum y = 0; \end{cases}$$

$$-N_{12} \cos \alpha + N_{23} \cos \alpha + N_{24} = 0$$

$$N_{12} \sin \alpha + N_{23} \sin \alpha = 0$$

nodul 3:

$$\begin{cases} \sum x = 0; \\ \sum y = 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -N_{13} - N_{23} \cos \alpha + N_{35} N_{34} \cos \alpha &= 0 \\ N_{23} \cos(90 - \alpha) + N_{34} \cos(90 - \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

nodul 4:

$$\begin{cases} \sum x = 0; \\ \sum y = 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -N_{24} - N_{34} \cos \alpha - N_{46} - N_{45} \cos \alpha &= 0 \\ N_{34} \sin \alpha + N_{45} \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

nodul 5:

$$\begin{cases} \sum x = 0; \\ \sum y = 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -N_{35} - N_{45} \cos \alpha + N_{57} + N_{56} \cos \alpha &= 0 \\ N_{45} \sin \alpha + N_{56} \sin \alpha - 1 &= 0 \end{aligned}$$

nodul 6:

$$\begin{cases} \sum x = 0; \\ \sum y = 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -N_{46} - N_{56} \cos \alpha + N_{57} \cos \alpha &= 0 \\ N_{56} \sin \alpha + N_{57} \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Tabelul 1.2.

Bare i,j	$l_{i,j}$ (m)	EA (N)	$N_{i,j}/\bar{N}_{i,j}$ (N)	$N_{i,j} \cdot \bar{N}_{i,j} \cdot l_{i,j}$
1,2	4,3	$7.875 \cdot 10^8$	-0.4095	0.721
1,3	5,0		0.238	0.283
2,3	4,3		0.4095	0.721
2,4	5,0		-0.476	1.133
3,4	4,3		-0.4095	0.721
3,5	5,0		0.714	2.549
4,5	4,3		0.4095	0.721
4,6	5,0		-0.952	4.532
5,6	4,3		0.819	2.884
5,7	5,0		0.476	1.133
6,7	4,3		-0.819	2.894
$EA_{i,j} \delta = \sum N_{i,j} \bar{N}_{i,j}$				10.282

nodul 7:

$$\begin{cases} \sum x = 0; \\ \sum y = 0; \end{cases}$$

$$-N_{57} - N_{67} \cos \alpha = 0$$

$$\frac{2}{3} + N_{67} \sin \alpha = 0$$

Rezolvând sistemele de ecuații de mai sus și utilizând datele numerice din tabelul 1.1, se obțin eforturile axiale din tabelul 1.2.

2. Calculul flexibilității, δ

În cazul structurilor cu zăbrele cu barele articulate în noduri, coeficientul de flexibilitate se determină cu relația:

$$\delta = \sum \frac{\bar{N}_{i,j} N_{i,j}}{EA_{i,j}} l_{i,j}$$

și folosind datele din tabelul 1.2 rezultă:

$$\delta = \frac{18,282}{7,875 \cdot 10^8} = 2,3215 \text{ (mN}^{-1}\text{)}.$$

PROBLEME REZOLVATE 2

SISTEME CU 1 GLD – VIBRAȚII FORȚATE

Problema 2.1

Pentru următoarele structuri acționate de încărcarea gravitațională, Q și forța perturbatoare, $F(t)$, să se traseze diagramele de eforturi maxime și minime, în regim staționar, figurile 2.1 – 2.4.

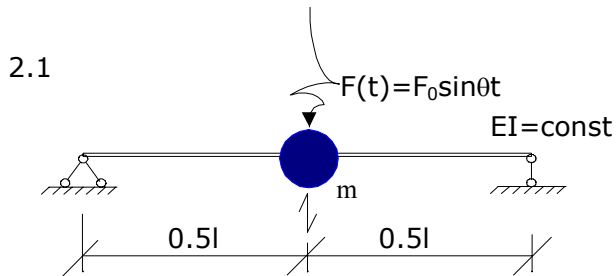


Fig.2.1

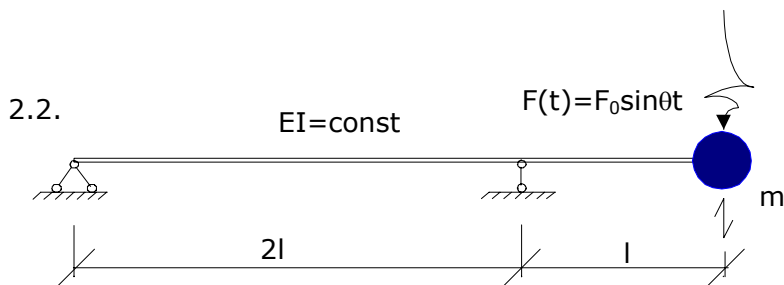


Fig.2.2

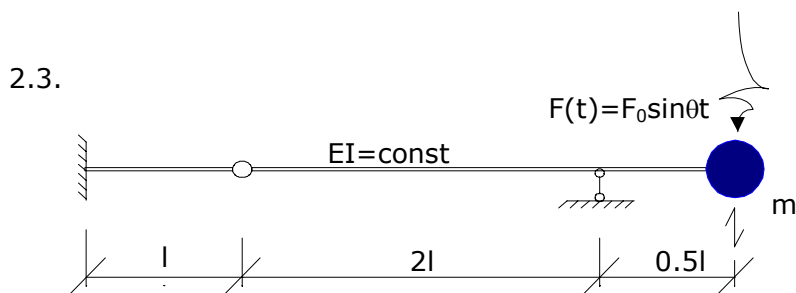


Fig.2.3

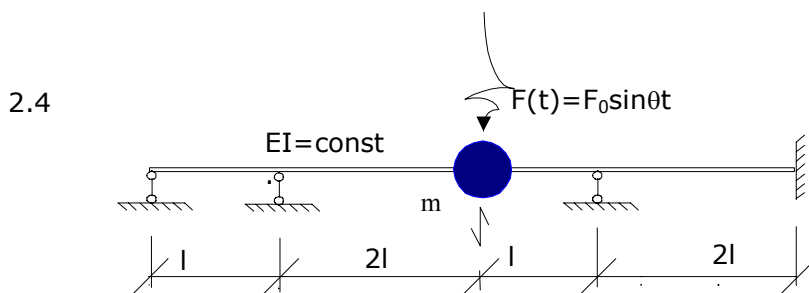


Fig.2.4

Problema 2.2

Să se reprezinte grafic variațiile masei m exprimate în deplasări, viteze și accelerații pentru:

2.1. Vibrațiile libere neamortizate ale sistemului vibrant 2.1, $x_0 = 0.02\text{m}$ și $v_0 = 1\text{ms}^{-1}$;

2.2. Vibrațiile libere amortizate ale sistemului 2.1, $x_0 = 0.02\text{m}$, $v_0 = 0.5\text{ms}^{-1}$ și $\nu = 0.1$;

2.3. Vibrațiile forțate în regim staționar de acționare a forței perturbatoare ale sistemelor din figurile 2.2- 2.5

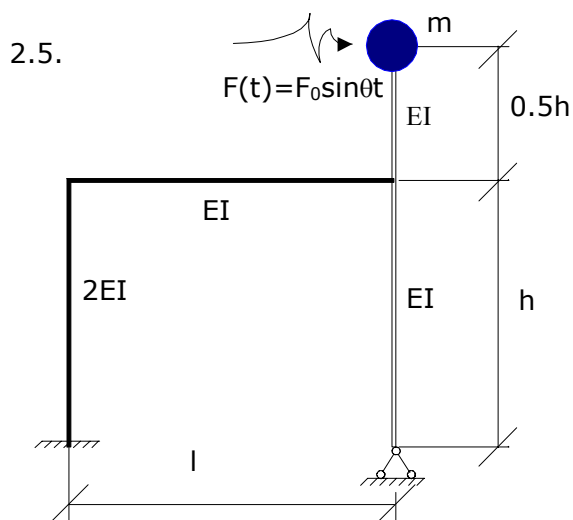


Fig.2.5 Cadru static nedeterminat

Problema 2.3

Să se determine presiunile pe talpa unei fundații paralelipipedice din beton care susține o mașină cu greutatea Q_1 și care produce o încărcare dinamică pe verticală $F(t) = F_0 \sin \theta t$, figura 2.6.

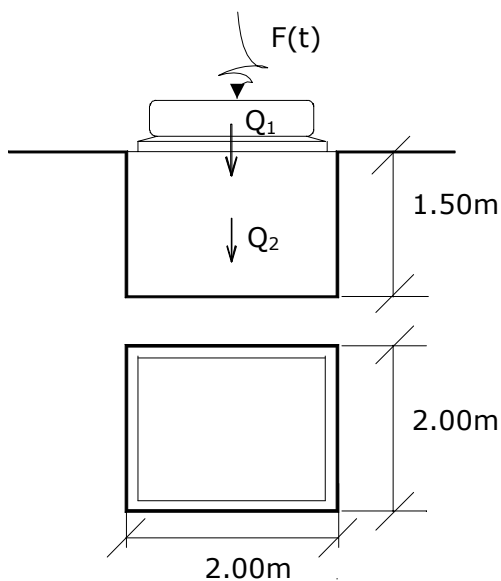


Fig.2.6 Fundație de mașini

Breviar teoretic

1. Forțe

Forțele care intervin în echilibrul dinamic instantaneu în cazul vibrațiilor forțate cu amortizare vâscoasă, sunt următoarele:

- o forța de inerție

$$F_i(t) = -m \cdot \ddot{x}(t) \quad (2.1)$$

- o forța de amortizare

$$F_a(t) = c \cdot \dot{x}(t) \quad (2.2)$$

- o forța elastică

$$F_e(t) = k \cdot x(t) \quad (2.3)$$

- o forța perturbatoare

$$F(t) = F_0 \cdot \sin \theta t \quad (2.4)$$

2. Ecuații de condiție

Ecuația de mișcare va avea forma finală:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \sin \theta t \quad (2.5)$$

unde s-au introdus notațiile:

$$2\beta = \frac{c}{m},$$

β reprezintă un factor de amortizare

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

pulsația proprie a sistemului oscilant neamortizat.

3. Răspunsul exprimat în deplasări

Răspunsul forțat staționar, fără a considera amortizarea se determină cu expresia:

$$x(t) = \mu F_0 \delta \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \theta t \right) \quad (2.6)$$

sau

$$x(t) = \mu \cdot F_0 \cdot \delta \cdot \sin \theta t, \quad (2.7)$$

considerând numai influența răspunsului forțat.

În expresiile de mai sus cu μ s-a notat coeficientul dinamic sau factorul de amplificarea dinamică care se determină cu relația:

$$\mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - p^2} \quad (2.8)$$

în care $p = \theta/\omega$.

Răspunsul forțat, în cazul vibrațiilor forțate cu amortizare, se calculează cu relația:

$$x(t) = \mu^* F_0 \cdot \delta \cdot \sin(\theta t - \varphi) = X_0 \cdot \sin(\theta t - \varphi^*) \quad (2.9)$$

unde factorul dinamic cu considerarea amortizării este:

$$\mu^* = \frac{1}{\sqrt{(1 - p^2)^2 + 4v^2 p^2}} \quad (2.10)$$

și $x_0 = \mu^* F_0 \delta$ reprezintă amplitudinea deplasării forțate, iar:

$$\varphi^* = \arctg \frac{2vp}{1 - p^2} \quad (2.11)$$

în care factorul sau procentul din amortizarea critică v are expresia:

$$v = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{2\beta m}{2\omega m} = \frac{\beta}{\omega} = \frac{\Lambda}{2\pi}$$

$$v\% = \frac{c}{c_{cr}} 100$$

4. Răspunsul exprimat în eforturi

Pentru trasarea diagramelor de eforturi maxime și minime, în cazul unui sistem oscilant acționat de forțe perturbatoare, structura se încarcă cu următoarele forțe:

amplitudinea forței de inerție, I_0 :

$$F_i(t) = -m\ddot{x}(t) = m\theta^2 \mu F_0 \cdot \delta \cdot \sin\theta t \quad (2.12)$$

$$I_0 = m \cdot \theta^2 \mu \cdot F_0 \cdot \delta = m \cdot \theta^2 \cdot X_0 \quad (2.13)$$

amplitudinea forței perturbatoare,

$$F_0 \quad (F(t) = F_0 \cdot \sin\theta t);$$

forța gravitațională,

$$G = m \cdot g.$$

Obs. 1. În cazul vibrațiilor forțate cu amortizare în relațiile de mai sus se înlocuiește μ cu μ^* .

Obs. 2. În cazul în care forța perturbatoare este aplicată în dreptul masei pe direcția GLD, primele două forțe de mai sus se înlocuiesc cu amplitudinile forței dinamice, F_d :

$$F_d(t) = F(t) + F_i(t) \quad (2.14)$$

cu amplitudinea:

$$F_d = \pm \mu F_0;$$

sau

$$F_d = \pm \mu^* F_0 \quad (2.15)$$

Aplicații

Aplicația 2.1

1-3. Calculul pulsației proprii, ω

Conform aplicației 1.1.1

$$\delta = 2,480159 \cdot 10^{-7} \text{ mN}^{-1}$$

$$\omega = 31,749016 \text{ rad s}^{-1}$$

4. Determinarea factorului de amplificare dinamică, μ

$$\mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{20}{31,744016}\right)^2} = 1,657895$$

5. Calculul forței dinamice, F_d

Amplitudinea forței dinamice se calculează cu relația:

$$F_d = \mu F_0 = 1,657895 \cdot 10^4 \text{ N};$$

iar forța gravitațională:

$$Q = mg = 4 \cdot 10^3 \cdot 9,81 = 3,924 \cdot 10^4 \text{ N}$$

6. Trasarea diagramelor de eforturi maxime și minime

Diagramele de eforturi se trasează prin suprapunerea efectelor și sunt prezentate în figura 2.7.

Aplicația 2.2

1-3. Calculul pulsației proprii, ω

Conform aplicației 1.2:

$$\delta = 1,1905 \cdot 10^{-5} \text{ mN}^{-1}$$

$$\omega = 4,5826 \text{ rad s}^{-1}$$

4. Determinarea factorului de amplificare dinamică, μ

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta_d^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{9}{4,5826}\right)^2} = -0,35$$

5. Calculul forței dinamice, F_d

Amplitudinea forței dinamice, F_d , rezultă:

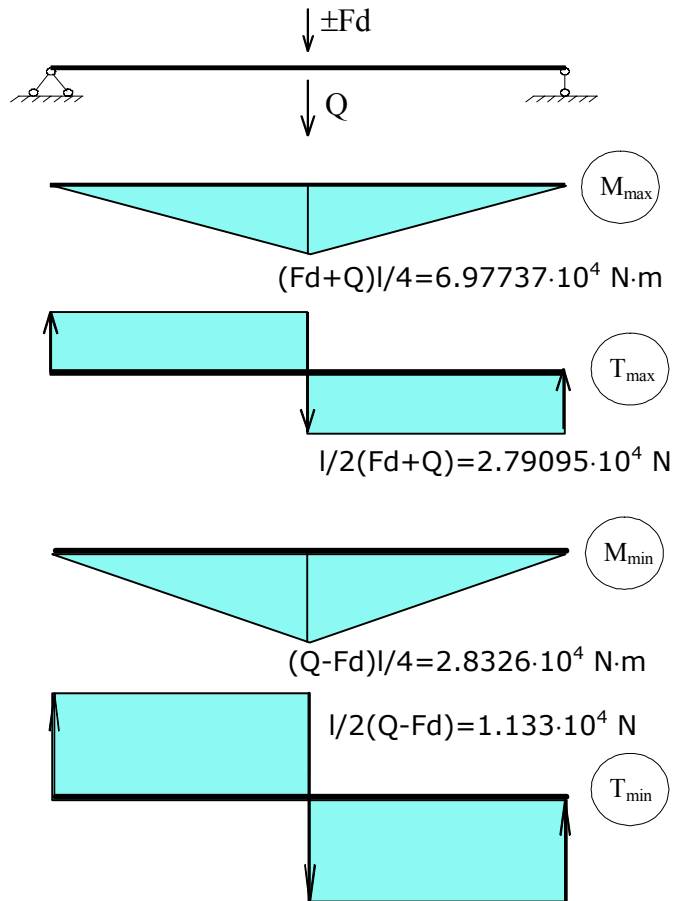


Fig.2.7

$$F_d = \mu F_o = -3,5 \cdot 10^3 \text{ N}$$

iar a forței gravitaționale

$$Q = mg = 4 \cdot 10^3 \cdot 9,81 = 3,924 \cdot 10^4 \text{ N}$$

6. Diagramele de eforturi maxime și minime: $M_{\max}$ și $M_{\min}$

Diagramele de momente încovoietoare sunt prezentate în figura 2.8.

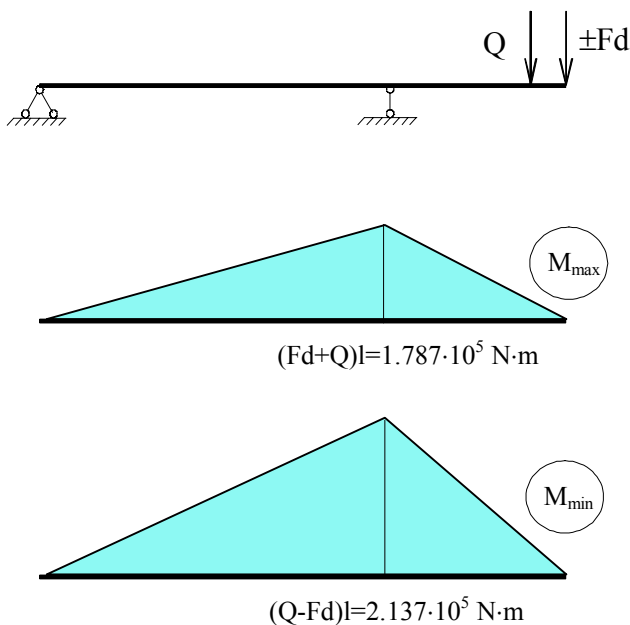


Fig.2.8

Aplicația 2.3

1. Calculul factorului de amplificare dinamică, μ .

Diagrama de momente pentru calculul flexibilității este trasată în figura 2.9.

Coeficientul de flexibilitate rezultă:

$$\delta = \frac{11l^3}{48EI} = 2,72817 \cdot 10^{-6} \text{ mN}^{-1},$$

iar pulsația proprie

$$\omega = 9,57269 \text{ rad s}^{-1}$$

și factorul de amplificare:

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{7}{9,57269}\right)^2} = 2,14925$$

2. Determinarea răspunsului exprimat în deplasări

$$y(t) = \mu F_0 \delta \sin \theta t = 0,0586352 \sin 7t$$

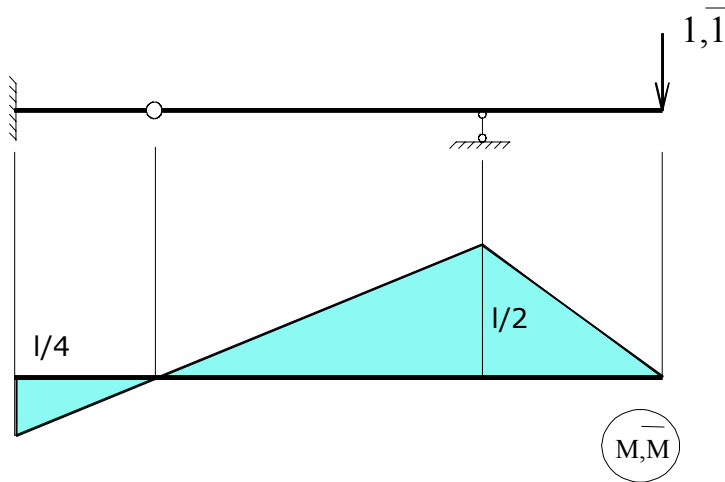


Fig.2.9

$$y_d = \mu F_0 \delta = 0,0586352 \text{ m}$$

Deplasarea produsă de forța gravitațională

$$Y_Q = Q \delta = 4 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 2,72817 \cdot 10^{-6}$$

$$Y_Q = 0,1070534 \text{ m}$$

Deplasările finale (maxime și minime) rezultă:

$$Y_{\max} = Y_d + Y_Q = 0,1656886 \text{ m}$$

$$Y_{\min} = Y_Q - Y_d = 0,0484182 \text{ m}$$

3. Determinarea răspunsului exprimat în eforturi

Calculăm valorile forțelor maxime și minime:

$$F_d = \mu F_0 = 2,14925 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$Q = mg = 3,924 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$F_{\max} = Q + F_d = 6,07325 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$F_{\min} = Q - F_d = 1,77475 \cdot 10^4 \text{ N}$$

și trasăm diagramele de eforturi, figura 2.10.

Aplicația 2.4

1. Calculul flexibilității, δ

Constituim cele două stări de acționare: reale și virtuale, figura 2.11.

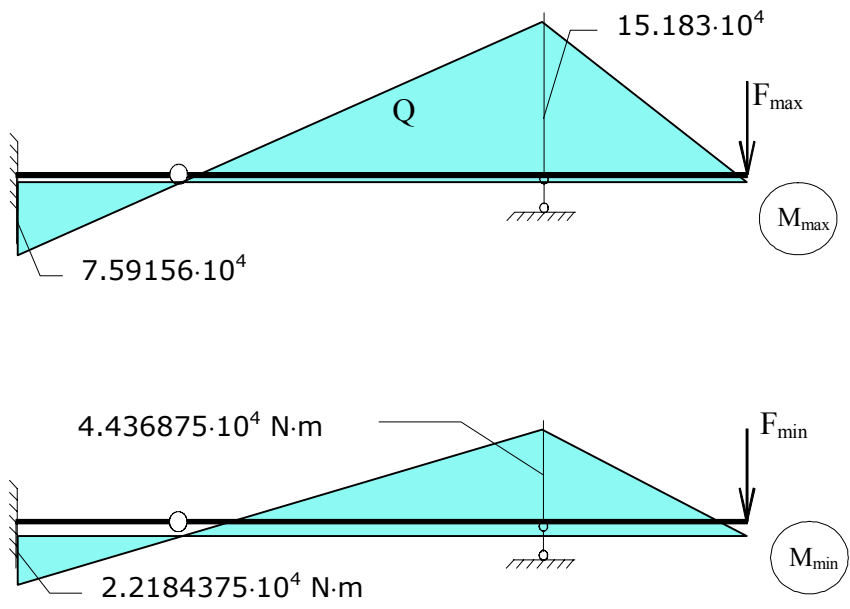


Fig.2.10

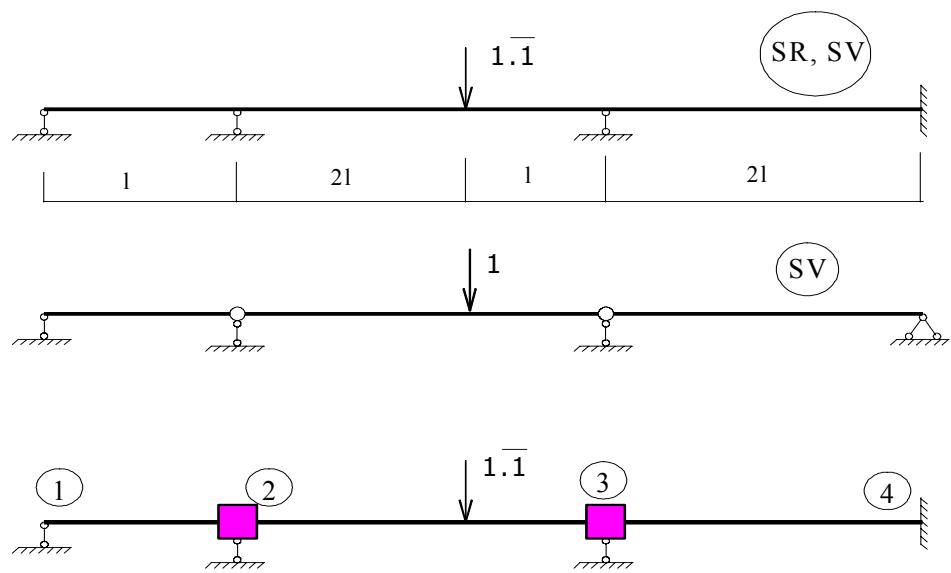


Fig.2.11

Diagramele de momente M , $\bar{M}$ vor fi trasate prin procedeul distribuirii și transmiterii momentelor, figurile 2.12, 2.13 și 2.14.

Determinăm rigiditățile la rotire, rigiditățile nodurilor, factorii de distribuție și momentele de încastrare perfectă:

$$K_{21} = \frac{3EI}{l} \quad K_2 = K_{21} + K_{23} = \frac{13EI}{3l}$$

$$d_{21} = \frac{K_{21}}{K_2} = 0,6923$$

$$K_{23} = \frac{4EI}{3l}$$

$$K_{32} = \frac{4EI}{3l} \quad K_3 = K_{32} + K_{34} = \frac{10EI}{3l}$$

$$d_{32} = \frac{K_{32}}{K_3} = 0,4$$

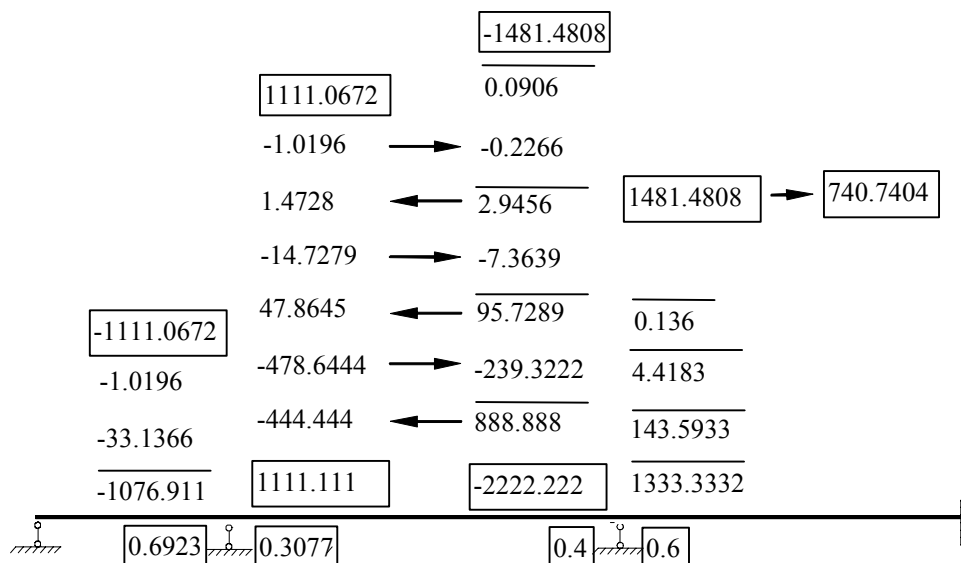


Fig.2.12

$$K_{34} = \frac{4EI}{2l}$$

$$d_{34} = \frac{K_{34}}{K_3} = 0,6$$

$$M_{23} = \frac{Pab^2}{l^2} = \frac{1 \cdot 2l \cdot l^2}{(3l)^2} = \frac{2}{9}l = 1,11111Nm$$

$$M_{32} = \frac{Pa^2b}{l^2} = \frac{1 \cdot (2l)^2 \cdot l}{(3l)^2} = \frac{4}{9}l = 2,22222Nm$$

Verificarea diagramei M:

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{\overline{M}_1 M}{EI} dx &= -\frac{l}{3EI} \cdot 1,111067 \cdot 1 + \frac{2l}{6EI} (-2 \cdot 1,111067 \cdot 1 + \\ &\quad + 2 \cdot 1,975324 \cdot \frac{l}{3} + 1 \cdot 1,975324 - \\ &\quad - \frac{1}{3} \cdot 1,111067) + \frac{l}{6EI} (2 \cdot 1,975324 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 1,481481) = \\ &= \frac{l}{6EI} (7,901296 - 7,90094) \end{aligned}$$

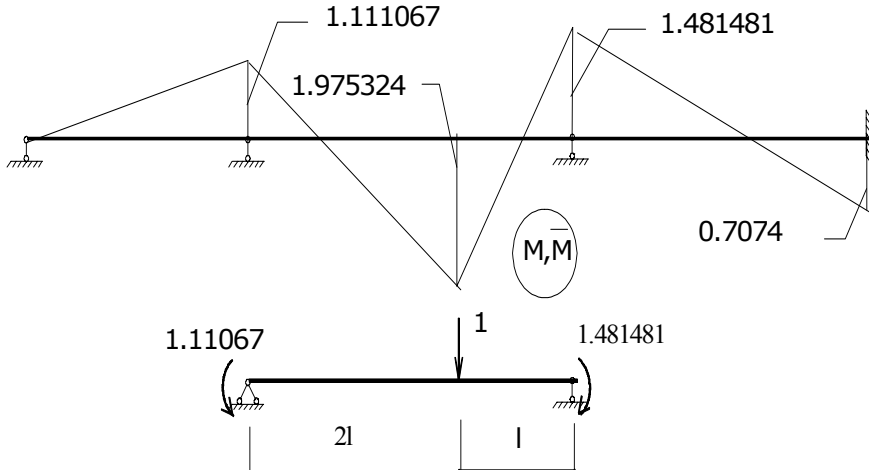


Fig.2.13

$$\varepsilon_T \% = \frac{7,901296 - 7,90094}{7,901296} \cdot 100 = 4,5 \cdot 10^{-3} < 0,1$$

Calculăm coeficientul de flexibilitate:

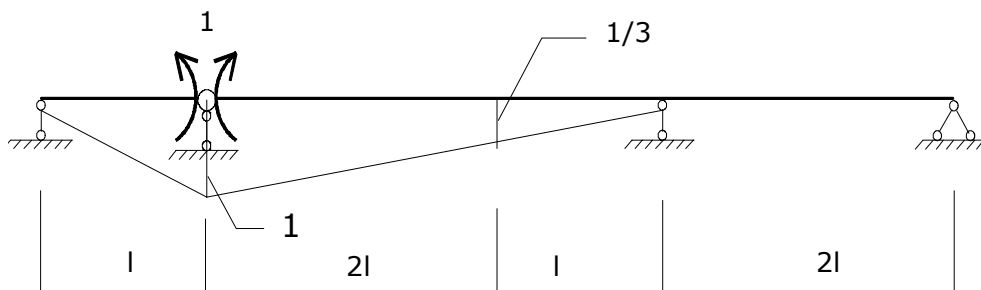


Fig.2.14

$$\begin{aligned}\delta &= \sum \int \frac{\bar{M}M}{EI} dx = \frac{l}{3EI} \cdot 1,111067 \cdot 1,111067 + \frac{2l}{6EI} \cdot (2 \cdot (1,111067)^2 \\ &\quad + 2 \cdot (1,975324)^2 - \\ &\quad - 2 \cdot 1,111067 \cdot 1,975324) + \frac{l}{6EI} 2 \cdot (1,975324)^2 + 2 \cdot (1,481481)^2 \\ &\quad - 2 \cdot 1,975324 \cdot 1,481481 + \\ &\quad + \frac{2l}{6EI} \cdot 2 \cdot (1,481481)^2 + 2 \cdot (0,74074)^2 - 2 \cdot 1,481481 \cdot 0,74074 \\ &= 27,16049927 \frac{l}{6EI}\end{aligned}$$

$$\delta = 2,155595 \cdot 10^{-6} \text{ mN}^{-1}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta}} = 10,7693 \text{ radS}^{-1}$$

2. Determinarea factorului de amplificare dinamică, μ .

$$\mu^* = \frac{1}{(1 - \frac{7^2}{10,4693^2})^2 + 4(0,05)^2 \frac{7^2}{10,7693^2}} = 1,72072$$

$$F_d = \mu^* F_o = 1,72072 \cdot 10^4 \text{ N}$$

3. Determinarea răspunsului în eforturi

Cunoscând mărimea forței dinamice se determină forțele maxime și minime:

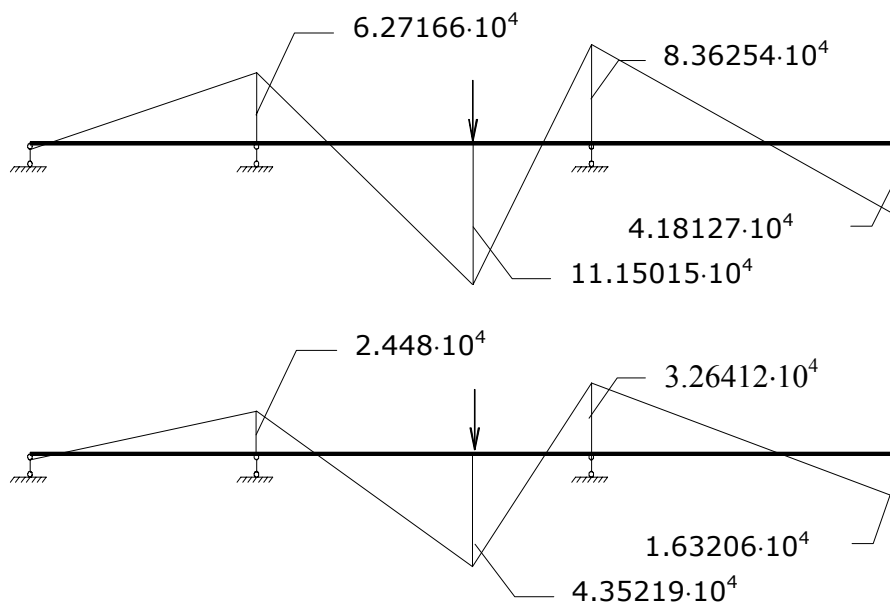


Fig.2.15

$$F_{\max} = Q + Fd = 4 \cdot 10^3 \cdot 9,81 + 1,72072 \cdot 10^4 = 5,64472 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$\min = Q - Fd = 3,924 \cdot 10^4 - 1,72072 \cdot 10^4 = 2,20328 \cdot 10^4 \text{ N}$$

iar diagramele de eforturi sunt trasate în figura 2.15.

Aplicația 2.5

1. Calculul flexibilității, δ

Pentru calculul coeficientului de flexibilitate utilizăm metoda forțelor, figura 2.16.

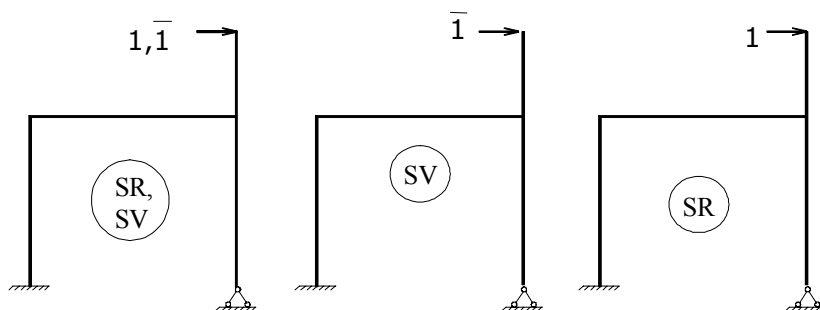


Fig.2.16.a.

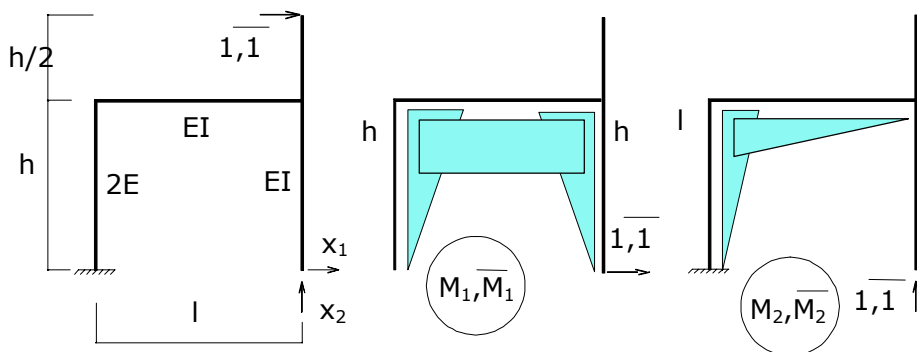


Fig. 2.16.b.

Calculul coeficienților:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M_1}{EI} dx = \frac{h^3}{2EI} + \frac{h^2 l}{EI}$$

$$\delta_{12} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M_2}{EI} dx = \frac{l^2 h}{2EI} + \frac{h^2 l}{4EI}$$

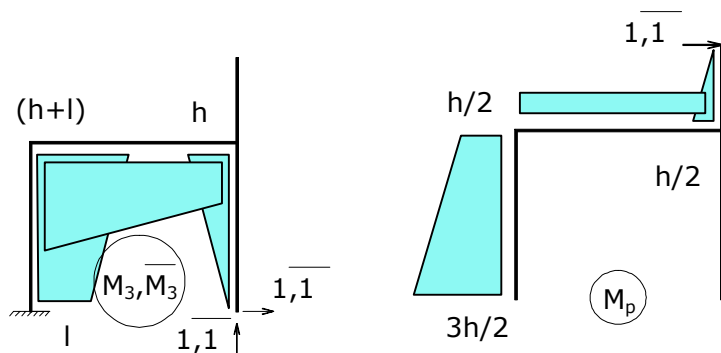


Fig. 2.16.c.

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\overline{M}_2 M_2}{EI} dx = \frac{l^3}{3EI} + \frac{l^2 h}{2EI}$$

Verificarea coeficienților:

$$\delta_{ss} = \delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = \frac{h^3}{3EI} + \frac{l^3}{3EI} + \frac{3hl^2}{2EI} + \frac{3h^2l}{2EI}$$

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{\overline{M_s} M_s}{EI} dx = \frac{h^3}{3EI} + \frac{l^3}{3EI} + \frac{3hl^2}{2EI} + \frac{3h^2l}{2EI}$$

Calculul termenilor liberi:

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\overline{M_1} M_p}{EI} dx = -\frac{h^2l}{2EI} - \frac{5h^3}{24EI}$$

$$\Delta_{2p} = \sum \int \frac{\overline{M_2} M_p}{EI} dx = -\frac{hl^2}{4EI} - \frac{h^2l}{2EI}$$

Verificarea termenilor liberi:

$$\Delta_{sp} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = -\frac{5h^3}{24EI} - \frac{hl^2}{4EI} + \frac{h^2l}{EI}$$

$$\Delta_{sp} = \sum \int \frac{\overline{M_s} M_p}{EI} dx = -\frac{5h^3}{24EI} - \frac{hl^2}{4EI} + \frac{h^2l}{EI}$$

Sistemul de ecuații de condiție:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Pentru datele din tabelul nr. 1 și expresiile coeficienților și termenilor liberi determinate mai sus, rezultă soluția:

$$X_1 = 0,0777927$$

$$X_2 = 0,5608432$$

Diagrama de momente finale se determină prin suprapunerea efectelor, figura 2.17.

$$M_f(x) = M_1(x) \cdot X_1 + M_2(x) \cdot X_2 + M_p(x).$$

Verificarea diagramei finale de momente:

- deplasarea după direcția necunoscută X_1 :

$$\Delta_{X1} = \sum \int \frac{\overline{M_2} M_f}{EI} dx = \frac{15,42682342 - 15,42684033}{EI} = \frac{A - B}{EI}$$

$$\varepsilon_T \% = \frac{A - B}{A} 100 = 1,096 \cdot 10^{-4} < 0,1\%$$

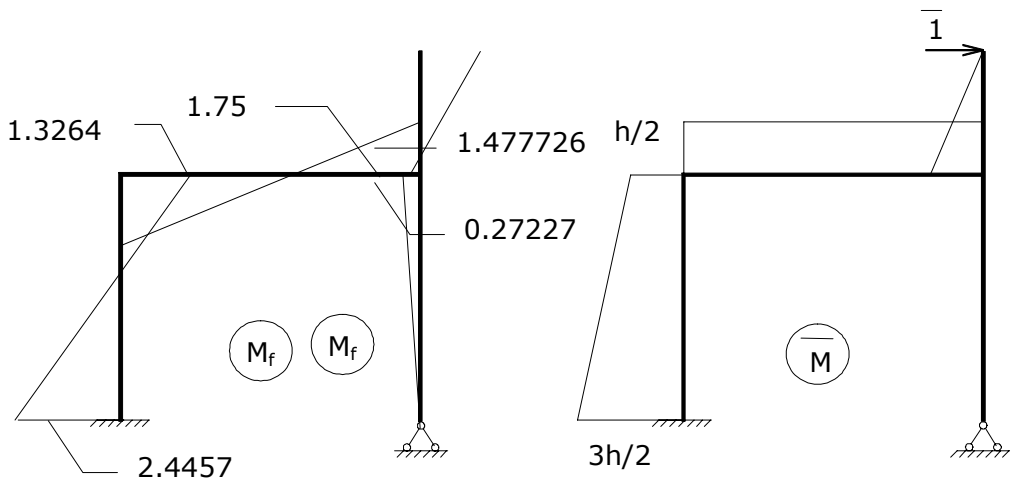


Fig. 2.17

- deplasarea după direcția necunoscutei X_2 :

$$\Delta_{X2} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_f}{EI} dx = \frac{16,85747708 - 16,85749667}{EI}$$

$$\varepsilon_T \% = 1,162 \cdot 10^{-4} < 0,1\%$$

Prin integrarea diagramelor de momente $\bar{M}_f$ și M_f , rezultă:

$$\delta = \sum \int \frac{\bar{M}_f M_f}{EI} dx = \frac{7,8013729}{EI} = 7,429879 \cdot 10^{-7} (\text{m})$$

sau prin integrarea diagramelor M_f și $\bar{M}$, rezultă:

$$\delta = \sum \int \frac{\bar{M} M_f}{EI} dx = \frac{7,80126}{EI} = 7,429879 \cdot 10^{-7} (\text{m})$$

2. Determinarea factorului de amplificare dinamică,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta}} = 18,34337 (\text{rad.s}^{-1})$$

$$\mu^* = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2})^2 + 4\nu^2 \frac{\theta^2}{\omega^2}}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{12^2}{18,34337^2})^2 + 4 \cdot 0,05^2 \frac{12^2}{18,34337^2}}}$$

$$\mu^* = 1,556393$$

3. Determinarea răspunsului în eforturi

Calculăm forța dinamică:

$$F_d = \mu F_o = 1,556393 \cdot 10^4 \text{ (N)}$$

iar diagramele de eforturi sunt trasate în figura 2.18.

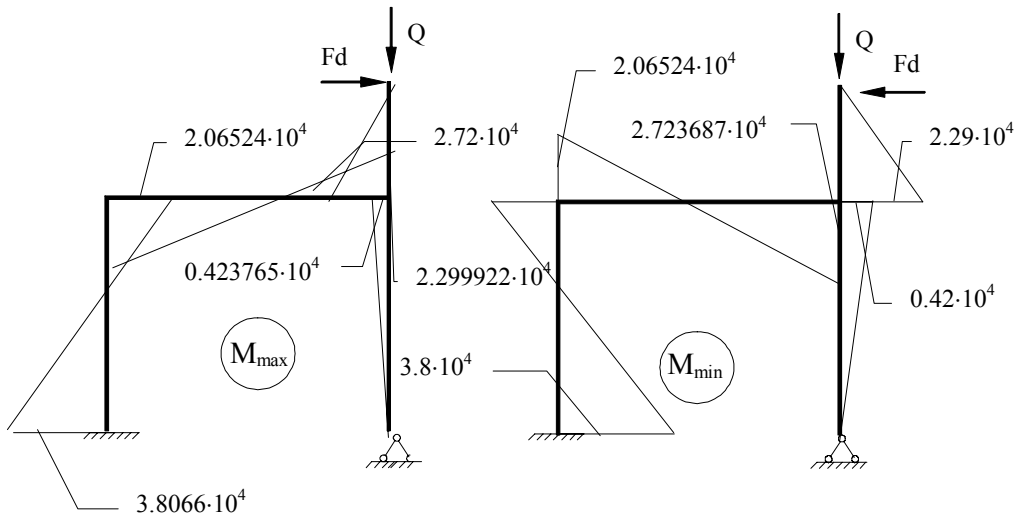


Fig.2.18

Problema nr. 2.2

Aplicația 2.6

Variațiile deplasărilor, vitezelor și accelerațiilor masei m a unui sistem cu 1 GLD se determină cu expresia:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = A \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

unde:

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2}$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{x_0 \omega}{v_0}.$$

Sistemul oscilant are o pulsație proprie de oscilație calculată în cadrul aplicației 1.1

$$\omega = 31,7490 \text{ rad s}^{-1},$$

luând în considerare și condițiile inițiale, aflăm:

$$A = 0,0373 \text{ (m)}, A\omega = 0,1846 \text{ ms}^{-1}, A\omega^2 = 37,6088 \text{ ms}^{-2}$$

$$\varphi = 0,5657 \text{ (s)}, \varphi/\omega = 0,01782$$

Expresiile $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ sunt reprezentate în figura 2.19.

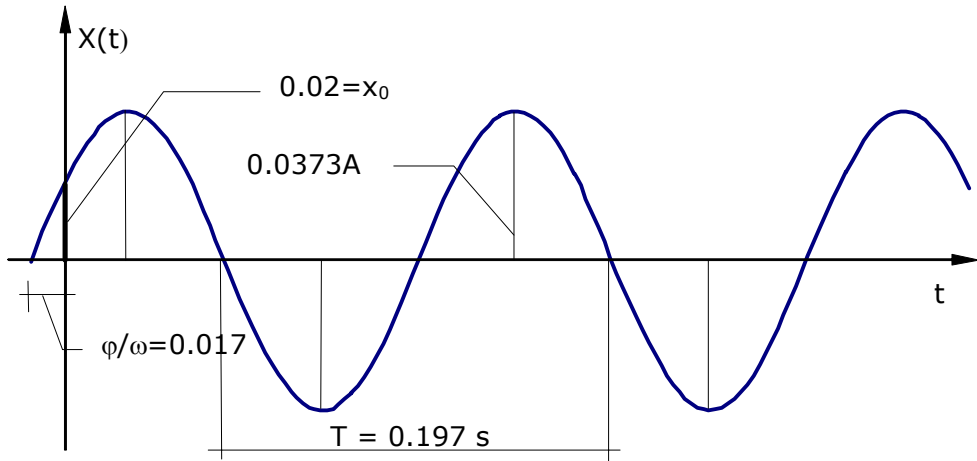


Fig. 2.19

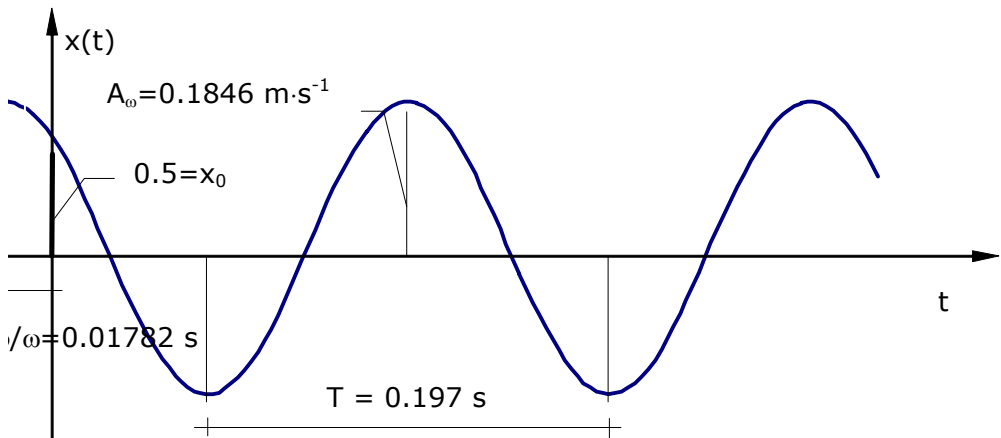


Fig.2.19.a

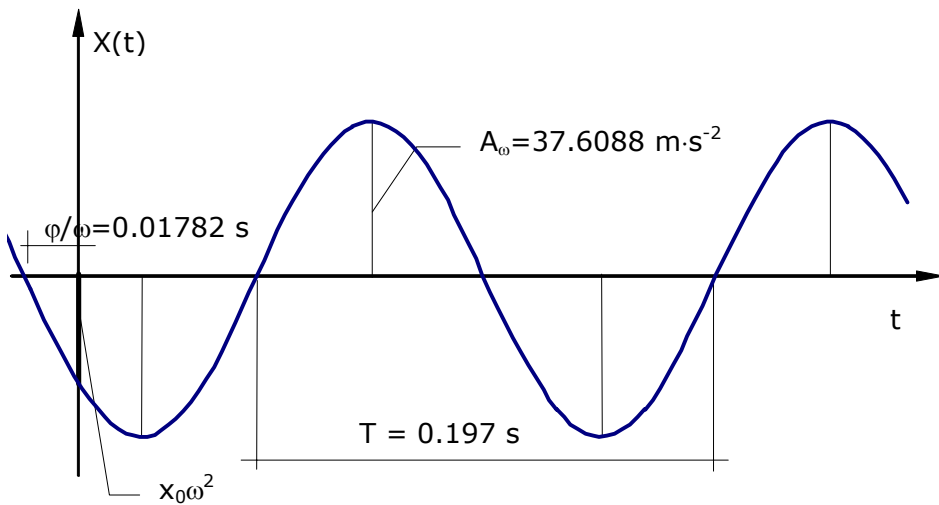


Fig.2.19.b

Aplicația 2.7

Pentru a reprezenta grafic variația deplasărilor masei m utilizăm expresia:

$$x(t) = Ae^{-v\omega t} \sin(\omega^*t + \varphi^*)$$

unde:

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0 + v\omega x_0}{\omega^*}\right)^2 + x_0^2}$$

$$\varphi^* = \arctg \frac{x_0\omega^*}{v_0 + v\omega x_0}$$

Introducând în expresiile de mai sus următoarele date numerice:

$$\omega = 4,5826 \text{ rad s}^{-1}, T = 1,3711 \text{ s (vezi 1.2)}$$

$$\omega^* = \omega\sqrt{1 - v^2} = 4,5596 \text{ rad s}^{-1}$$

$$T^* = \frac{T}{\sqrt{1 - v^2}} = 1,378 \text{ s}$$

$$x_0 = 0,02 \text{ m}, v_0 = 0,5 \text{ ms}^{-1} \text{ și } v = 0,1$$

rezultă:

$$A = 0,1134, \varphi^* = 0,1772 \text{ și } \frac{\varphi^*}{\omega^*} = 0,0389$$

Reprezentarea grafică a variației deplasărilor masei m este dată în figura 2.20.

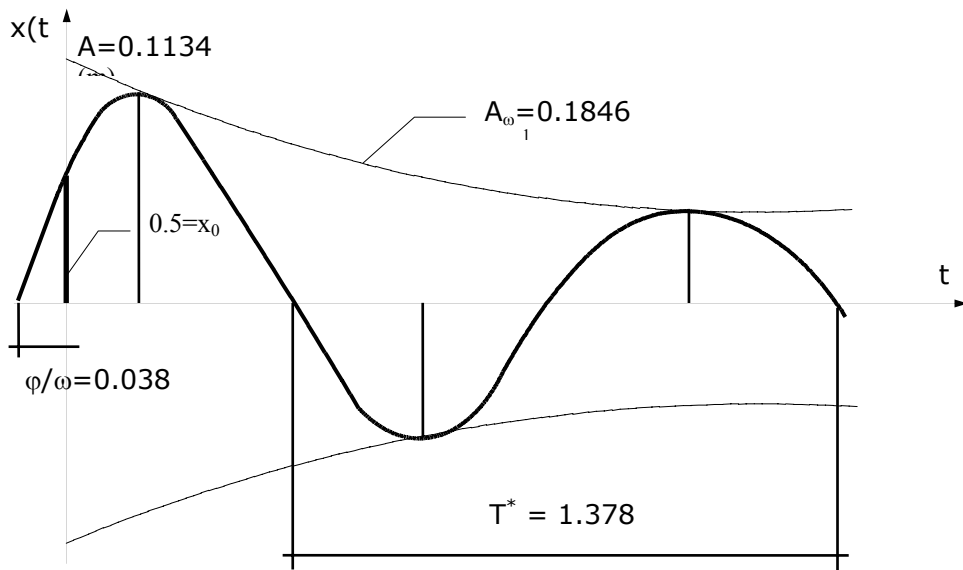


Fig. 2.20

Aplicația 2.8

În cadrul aplicației 2.5, pentru sistemul oscilant analizat s-au obținut:

$$\delta = 7,42977 \cdot 10^{-7} \text{ (m)}, T = 0,3425 \text{ (s)} \text{ și } \mu^* = 1,556393$$

Variația deplasărilor masei m a sistemului oscilant, în regim permanent de acționare a forței perturbatoare se determină cu relația:

$$x(t) = \mu^* F_0 \delta \sin(\theta t - \varphi_1)$$

unde:

$$\mu^* F_0 \delta = 1,556393 \cdot 10^4 \cdot 7,42977 \cdot 10^{-7} = 0,01156 \text{ (m)}$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{2\nu\omega\theta}{\omega^2 - \theta^2} = 0,1193 \text{ rad} \cdot \frac{1}{\omega} = 6,209 \cdot 10^{-3}$$

În figura 2.21 este prezentată variația deplasărilor masei sistemului oscilant.

Aplicația 2.8

În figura 1.25 este prezentată fundația pentru care se cere să se efectueze o analiză dinamică. Datele numerice ale ansamblului utilizat, fundație și teren sunt următoarele:

$$\gamma_b = 24 \text{ KN/m}^3, Q_1 = 400 \text{ KN}, F_0 = 40 \text{ KN}, \theta = 60 \text{ rad/s}$$

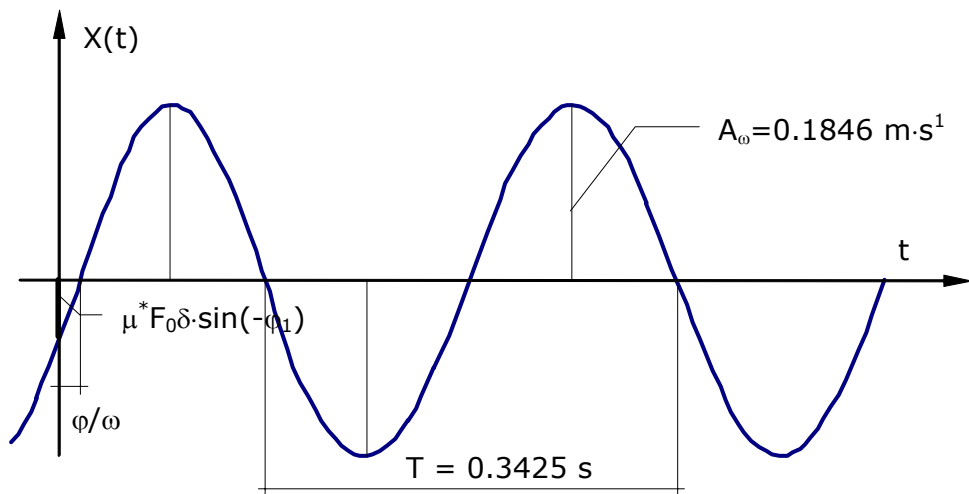


Fig. 2.21

$$\nu = 18\%, R_t = 2 \text{ daN/cm}^2, C_z = 4 \text{ daN/cm}^3 (\text{pt. R})$$

$$C_z^{\text{CORECTAT}} = \sqrt{\frac{10}{A_f}} = 6,3 \text{ daN/cm}^2$$

Rezolvare

Pulsația proprie a ansamblului fundație + teren se determină cu relația:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

unde:

$$k = C_z^{\text{CORECTAT}} \cdot A_f,$$

$$m = \frac{Q_1 + Q_2}{g},$$

$$Q_2 = V \cdot \gamma_b = (2 \cdot 2 \cdot 1,5) \cdot 24 = 144 \text{ Km},$$

rezultă:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot C_z \cdot A_f}{Q_1 + Q_2}} = \sqrt{\frac{981 \cdot 6,3 \cdot 200}{544 \cdot 10^2}} = 67,3 \text{ rad/s}$$

Factorul de amplificare dinamică:

$$\mu^* = \frac{1}{\sqrt{(1-p^2)^2 + 4v^2p^2}}; p = \frac{\theta}{\omega} = \frac{60}{67,3} = 0,89$$

$$\mu^* = \frac{1}{\sqrt{(1-0,89^2)^2 + 4 \cdot 0,18^2 \cdot 0,89^2}} = 2,6.$$

Presiunile maxime și minime pe talpa fundației se calculează cu expresia:

$$\sigma_{\max \min} = \sigma^0 \pm \mu \sigma^{Fo}$$

În care:

$$\sigma^Q = \frac{Q}{A_f} = \frac{Q_1 + Q_2}{A_f} = \frac{544 \cdot 10^2}{200 \cdot 200} = 1,36 \text{ daN / cm}^2$$

și

$$\sigma^{Fo} = \frac{F_o}{A_f} = \frac{40 \cdot 10^2}{200 \cdot 200} = 0,1 \text{ daN / cm}^2$$

Obținem în final:

$$\sigma_{\max} = 1,62 \text{ daN / cm}^2 < 2 \text{ daN / cm}^2 = R_t$$

$$\sigma_{\min} = 1,10 \text{ daN / cm}^2$$

Deplasările maxime și minime, pe verticală, ale fundației sunt date de relația:

$$y_{\max \min} = y_{st}^Q \pm \mu y_{st}^{Fo}$$

unde:

$$y_{st}^Q = \frac{Q}{C_Z A_f} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_Z A_f} = \frac{544 \cdot 10^2}{6,3 \cdot 200 \cdot 200} = 0,216 \text{ cm}$$

$$y_{st}^{Fo} = \frac{F_o}{C_Z A_f} = \frac{40 \cdot 10^2}{6,3 \cdot 200 \cdot 200} = 0,016 \text{ cm}$$

și efectuând calculele obținem:

$$y_{\max} = 0,258 \text{ cm}, \quad y_{\min} = 0,174 \text{ cm}.$$

PROBLEME PROPUSE 3

SISTEME CU 1GLD – VIBRAȚII LIBERE ȘI FORȚATE

Probleme propuse spre rezolvare:

1.1 Să se determine caracteristicile dinamice T , ω , f pentru următoarele sisteme oscilante:

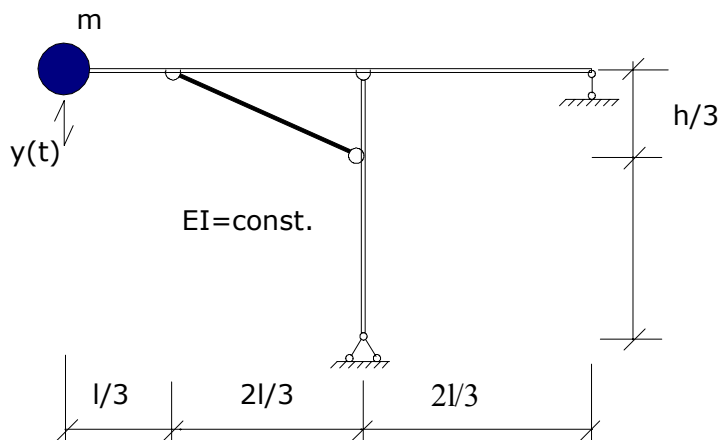


Fig. 1.1

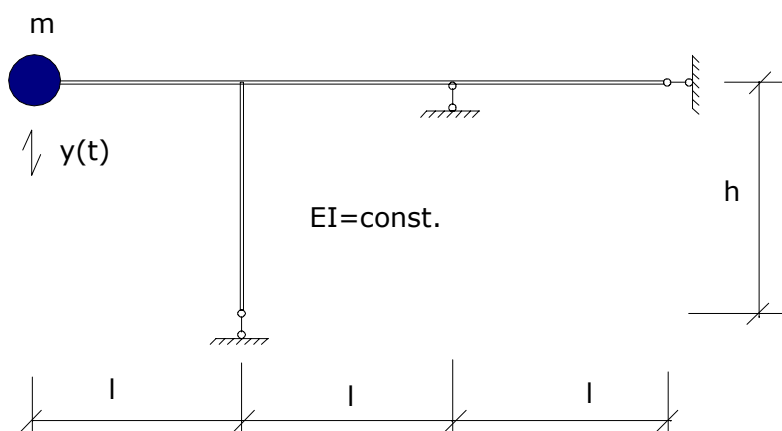


Fig.1.2

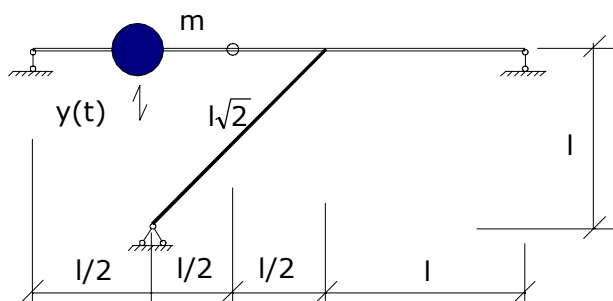


Fig. 1.3

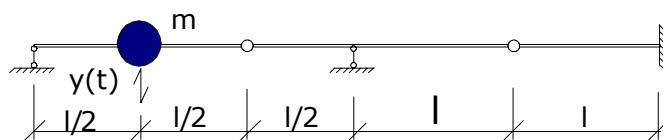


Fig. 1.4

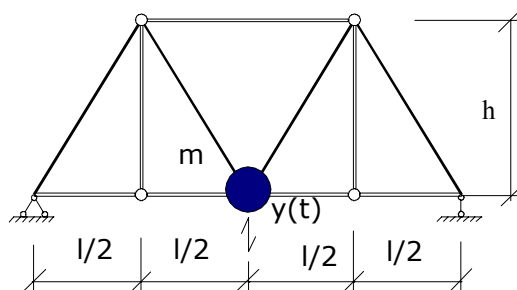


Fig. 1.5

1.2 Să se traseze diagramele de eforturi M , T , N maxime și minime pentru sistemele următoare:

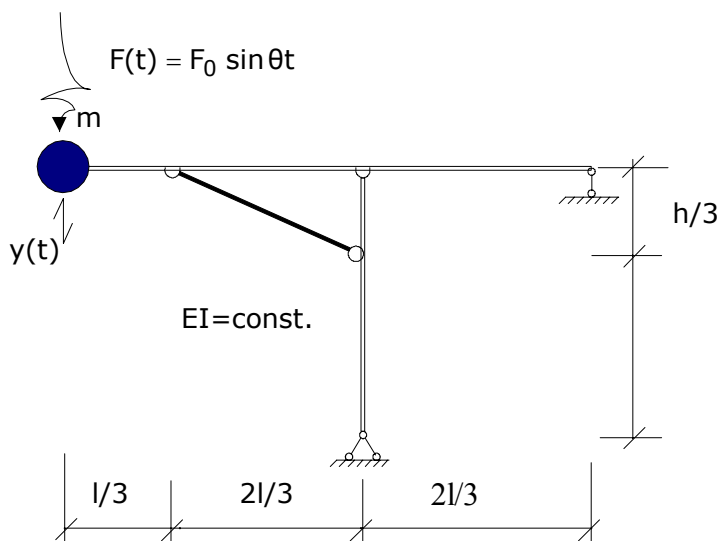


Fig.1.6

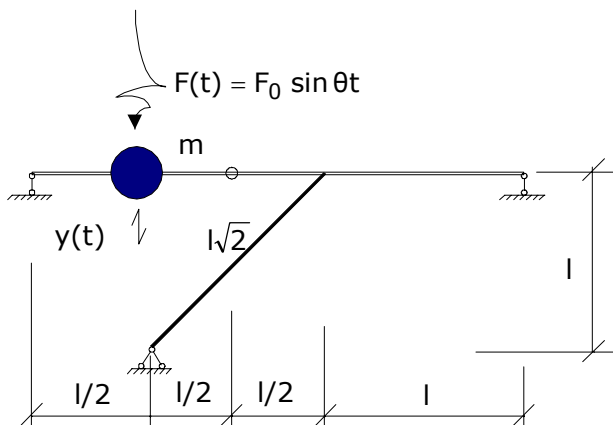


Fig.1.7

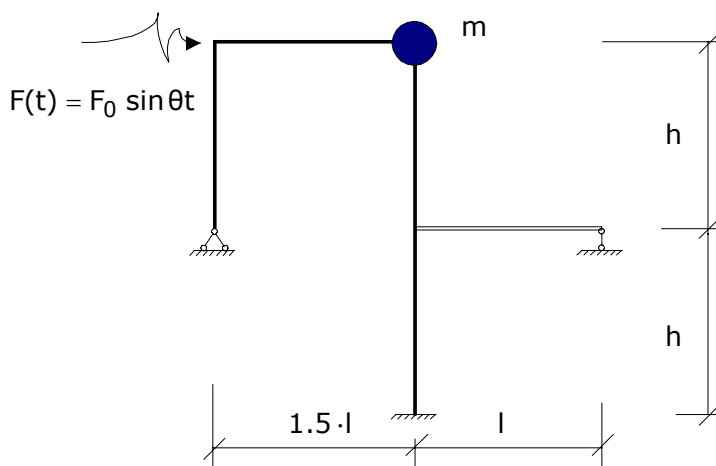


Fig. 1.8

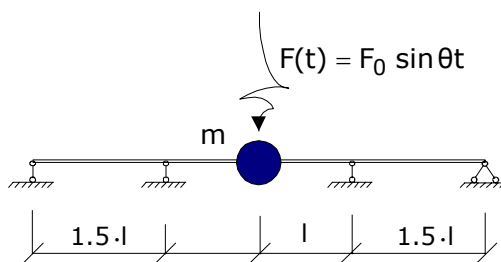


Fig.1.9

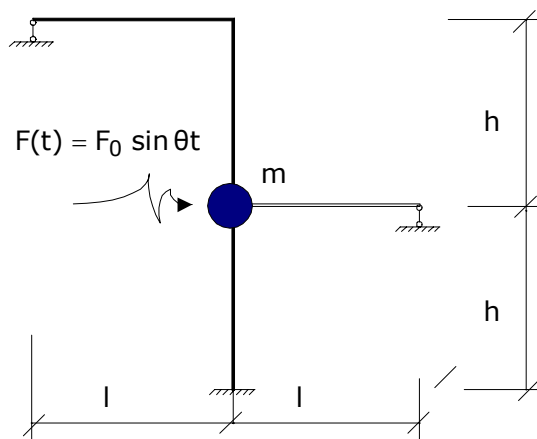


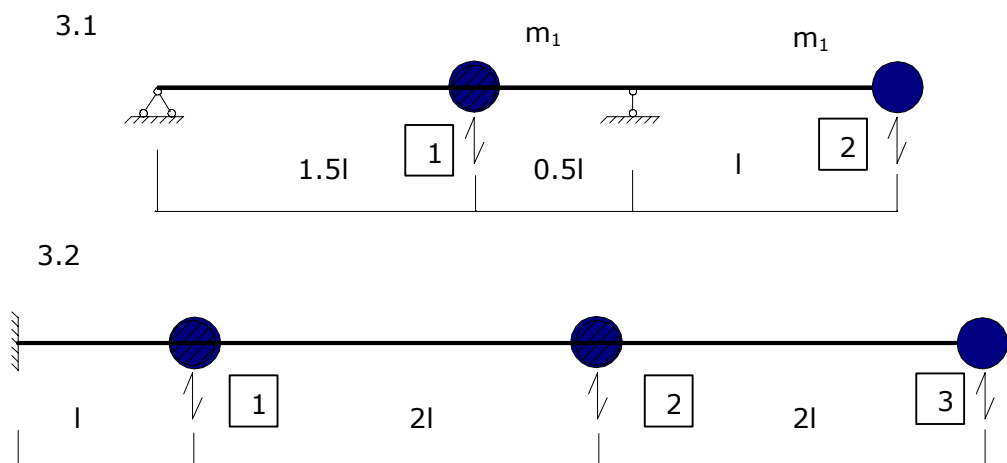
Fig. 1.10

PROBLEME REZOLVATE 4

SISTEME CU n GLD – VIBRAȚII LIBERE

Problema 3.1

Să se determine pulsațiile și formele proprii de vibrație ale următoarelor sisteme dinamice și să se verifice modurile proprii de vibrație.



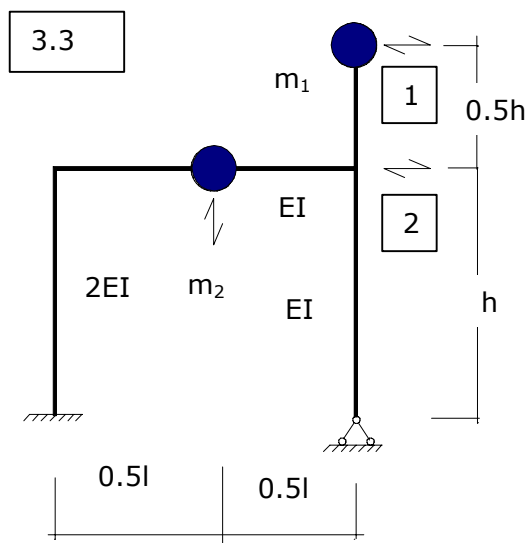


Fig. 3.2

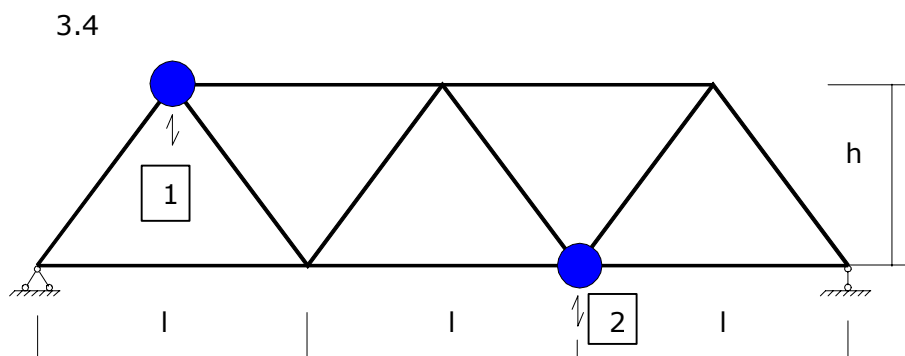


Fig. 3.3

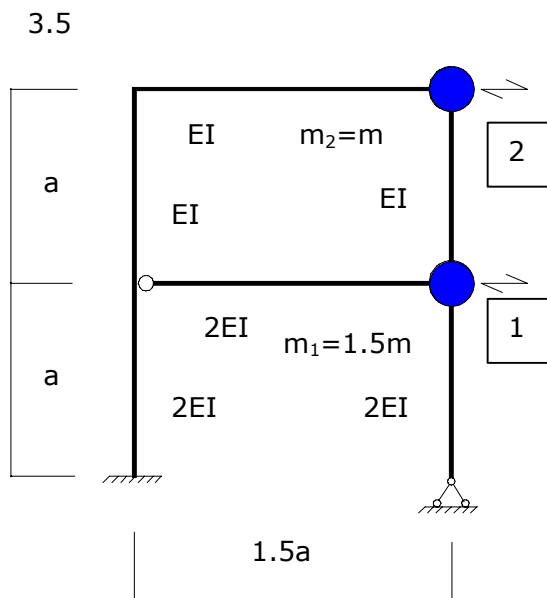


Fig. 3.4

Breviar teoretic

DETERMINAREA MODURILOR PROPRII DE VIBRAȚIE UTILIZÂND MATRICEA DE FLEXIBILITATE

Prin mod propriu de vibrație se înțelege ansamblul format dintr-o pulsație (valoare) proprie și o formă (vector) proprie de vibrație.

1. Constituirea matricei de inerție, [m]

Matricea de inerție a unui sistem oscilant se constituie prin scrierea pe diagonala principală a maselor sistemului oscilant.

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_j \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & m_n \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

2-3. Determinarea matricei de flexibilitate, [Δ]

Matricea de flexibilitate a unui sistem oscilant are forma:

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1j} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2j} & \cdots & \delta_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \cdots & \delta_{jj} & \cdots & \delta_{jn} \\ - & - & - & - & - & - \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nj} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

unde δ_{jk} reprezintă deplasarea produsă pe direcția GLD când structura considerată este acționată în dreptul masei m_k și pe direcția GLD k de o forță egală cu unitatea.

Coeficientul de flexibilitate se determină cu relația Mohr - Maxwell

$$\delta_{jk} = \sum \int \frac{M_j(x)M_k(x)}{EI} dx + \dots \quad (3.3)$$

prin integrarea diagramelor de eforturi trasate în cele două stări de acționare: reală (SR) și virtuală (SV).

4. Calculul valorilor (pulsărilor) proprii, ω_j .

Ecuția generală a vibrațiilor libere ale sistemului oscilant cu un GLD scrisă prin intermediul matricei de flexibilitate este:

$$[\Delta][m]\{\ddot{y}(t)\} + \{y(t)\} = \{0\} \quad (3.4)$$

Adoptând o soluție particulară de formă armonică

$$\{y(t)\} = \{A\}\sin(\omega t + \varphi) \quad (3.5)$$

ecuația (2.4) se transformă în:

$$(\omega^2)[\Delta][m] - [I]\{A\} = \{0\}, \quad (3.6)$$

care reprezintă ecuația generală a vibrațiilor proprii a unui sistem vibrant cu un GLD.

Ecuția (3.6) admite soluții diferite de zero când determinantul principal este nul:

$$|\omega^2[\Delta][m] - [I]| = 0 \quad (3.7)$$

sau

$$|[\Delta][m] - \lambda[I]| = 0 \quad (3.8)$$

unde

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2},$$

iar matricea rezultată din înmulțirea matricei de flexibilitate cu matricea de inerție poartă denumirea de matrice dinamică a sistemului dinamic.

Prin dezvoltarea determinantului (ecuația 2.8) se obține o ecuație de gradul n în λ numită ecuația caracteristică sau ecuația valorilor (pulașiiilor) proprii.

5. Constituiea matricei spectrale, $[\omega^2]$

Matricea spectrală se constituie prin scrierea pe diagonala principală a pulsașiiilor sau a pătratului pulsașiiilor proprii în ordine crescătoare:

$$[\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & 0 \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \omega_j^2 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

6. Verificarea pulsașiiilor proprii

Pentru a verifica valorile proprii determinate se compară urma (suma elementelor de pe diagonala principală) și determinantul matricei dinamice $[\Delta] \cdot [m]$ cu urma și determinantul inversei matricei spectrale $[\omega^2]^{-1}$ și dacă acestea sunt egale atunci avem certitudinea că sunt corect determinate:

$$u([\Delta][m]) = u([\omega^2]^{-1}) \quad (3.10)$$

$$\det([\Delta][m]) = \det([\omega^2]^{-1}). \quad (3.11)$$

Practic verificarea constă în a determina eroarea absolută (ε_a) și eroarea relativ ($\varepsilon_r\%$) cu relațiile:

$$\varepsilon_a = u([\Delta][m]) - u([\omega^2]^{-1}) \quad (3.12)$$

și

$$\varepsilon_r \% = \frac{\varepsilon_a}{u([\Delta][m])} \cdot 100 < 0,1,$$

$$\varepsilon_a = \det([\Delta][m]) - \det([\omega^2]^{-1}) \quad (3.13)$$

și

$$\varepsilon_r \% = \frac{\varepsilon_a}{\det([\omega^2]^{-1})} \cdot 100 < 0,1,$$

unde 0,1 reprezintă eroarea relativă admisibilă acceptată pentru un calculator electronic numeric.

7. Determinarea vectorilor (formelor) proprii de vibrație, $\{y_i\}$.

Forma (vectorul) proprie de vibrație reprezintă deformata sistemului oscilant sub acțiunea amplitudinilor forțelor de inerție.

Ecuția vectorilor proprii adimensionali este:

$$(\omega_j^2 [\Delta] [m] - [I]) \{y_i\} = \{0\} \quad (3.14)$$

sau

$$([\Delta] [m] - \lambda [I]) \{y_i\} = \{0\} \quad (3.15)$$

Introducând succesiv valorile proprii în sistemul de ecuații al formelor proprii de vibrație se obțin n sisteme de ecuații, iar soluțiile acestor sisteme, determinate admitând $y_{j,i}=1$, j fiind, în general, orice GLD, dar același pentru cele n forme proprii de vibrație, reprezintă ordonatele proprii de vibrație.

8. Constituirea matricei modale, $[Y]$.

Matricea modală se constituie prin scrierea pe coloane a vectorilor (formelor) proprii de vibrație.

$$[Y] = [\{y_1\} \{y_2\} \dots \{y_i\} \dots \{y_n\}] \quad (3.16)$$

9. Verificarea formelor proprii de vibrație

Formele proprii de vibrație determinate trebuie să verifice condițiile de ortogonalitate. Condiția de ortogonalitate se aplică pentru câte două forme proprii de vibrație:

$$\{y_i\}^T [m] \{y_r\} = 0 \quad (3.17)$$

sau

$$\sum_{j=1}^n m_j y_{j,i} y_{j,r} = 0. \quad (3.18)$$

Verificarea corectitudinii formelor proprii de vibrație se efectuează prin calcularea erorii absolute și a erorii relative:

$$\varepsilon_a = \sum_{j=1}^n m_j y_{j,1} y_{j,2} = A - B, \quad (3.19)$$

unde: A reprezintă o variabilă în care s-au cumulat valorile numerice pozitive din sumă și

B reprezintă o variabil în care s-au cumulat valorile numerice negative din sumă,

$$\varepsilon_r \% = \frac{\varepsilon_a}{A} \cdot 100 < 0,1. \quad (3.20)$$

DETERMINAREA MODURILOR PROPRII DE VIBRAȚIE UTILIZÂND MATRICEA DE RIGIDITATE

1. Constituirea matricei de inerție, [m]

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix}.$$

2-3. Determinarea matricei de rigiditate, [k]

Matricea de rigiditate a unui sistem dinamic are forma:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ k_{j1} & k_{j2} & \cdots & k_{jj} & \cdots & k_{jn} \\ - & - & - & - & - & - \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nj} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

unde k_{jj} reprezintă forța care aplicată în dreptul masei și pe direcția GLD, în sistemul oscilant, produce o deplasare egală cu unitatea în timp ce deplasările pe direcțiile celorlalte GLD sunt blocate de forțele k_{ij} .

De asemenea, k_{ij} se definește și ca reacțiunea ce ia naștere în blocajul GLD j ce produce o deplasare egală cu unitatea.

Pentru determinarea coeficienților de rigiditate k_{jk} se aplică metodele staticii construcțiilor, în cazul sistemului de bază dinamic (SBD) constituit din sistemul oscilant, prin introducerea de blocaje GLD, încărcat succesiv cu deplasări egale cu unitatea produse pe direcția blocajelor GLD.

4. Calculul valorilor (pulsățiilor) proprii, ω_i

Ecuția generală a vibrațiilor libere a sistemului oscilant cu n GLD scrisă prin intermediul matricei de rigiditate este:

$$[m]\{y(t)\} + [k]\{y(t)\} = \{0\}. \quad (3.22)$$

Aplicând soluția particulară de tip armonic (3.5) ecuația (3.22) devine:

$$([k] - \omega^2[m])\{A\} = \{0\}, \quad (3.23)$$

care reprezintă ecuația generală a vibrațiilor proprii a unui sistem vibrant scrisă prin intermediul matricei de rigiditate.

Ecuația (3.23) admite soluții diferite de zero când determinantul principal este zero:

$$|[k] - \omega^2[m]| = 0 \quad (3.24)$$

Prin dezvoltarea determinantului ecuației (3.24) se obține o ecuație de gradul n în ω^2 numită ecuația caracteristică sau ecuația valorilor (pulsățiilor) proprii.

5. *Constituirea matricei spectrale, $[\omega^2]$*

$$[\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

6. *Verificarea pulsațiilor proprii*

$$\varepsilon_r \% = \frac{u([m]^{-1}[k]) - u([\omega^2])}{u([m]^{-1}[k])} \cdot 100 < 0,1 \quad (3.25)$$

și

$$\varepsilon_r \% = \frac{\det([m]^{-1}[k]) - \det([\omega^2])}{\det([m]^{-1}[k])} \cdot 100 < 0,1. \quad (2.26)$$

7. *Determinarea vectorilor (formelor) proprii de vibrație, $\{y_i\}$*

Introducând succesiv valorile proprii în sistemul de ecuații al formelor proprii de vibrații adimensionale se obțin în sisteme de ecuații ale căror soluții, determinate pentru $y_{j,i}=1$, reprezintă ordonatele formelor proprii de vibrație:

$$\begin{aligned} ([k] - \omega_1^2[m])\{y_1\} &= \{0\} \\ ([k] - \omega_2^2[m])\{y_2\} &= \{0\} \\ \text{-----} & \\ ([k] - \omega_i^2[m])\{y_i\} &= \{0\} \\ \text{-----} & \\ ([k] - \omega_n^2[m])\{y_n\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

8. Constituirea matricei modale, $[y]$:

$$[y] = [\{y_1\}\{y_2\}\dots\{y_i\}\dots\{y_n\}]$$

9. Verificarea formelor proprii de vibrație.

Aplicând condițiile de ortogonalitate ale formelor proprii se verifică corectitudinea formelor proprii de vibrație determinate prin compararea erorii relative calculate cu eroarea relativă admisibilă a instrumentului de calcul utilizat.

Aplicații

Aplicația 3.1

1. Constituirea matricei de inerție, $[m]$

Pentru sistemul oscilant considerat, figura 3.1 și ținând seama de datele numerice din tabelul 2.1, matricea de inerție va fi:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (kg)}$$

2. Determinarea matricei de flexibilitate, $[\Delta]$

Prin integrarea diagramelor de momente din figura 3.5 se determină elementele matricei de flexibilitate.

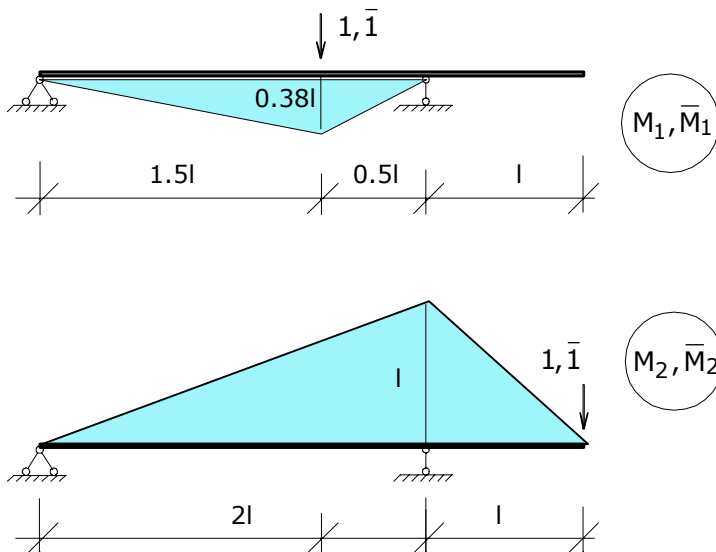


Fig. 3.5

$$\delta_{11} = \frac{3l^3}{32EI}; \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{7l^3}{32EI}; \delta_{22} = \frac{32l^3}{32EI}$$

iar matricea de inerție are forma:

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \frac{l^3}{32EI} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -7 & 32 \end{bmatrix} = 9,5238095 \cdot 10^{-8} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -7 & 32 \end{bmatrix} \text{ (mN}^{-1}\text{)}$$

3. Calculul valorilor (pulsărilor) proprii, ω_i

Introducând matricele de inerție și flexibilitate determinate mai sus în ecuația caracteristică, aceasta devine:

$$\left| \frac{ml^3}{32EI} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -7 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

și prin dezvoltarea determinantului;

$$a^3 - 38a^2 + 94 = 0$$

unde:

$$a = \frac{32EI}{ml^3} \lambda = \frac{32EI}{ml^3} \cdot \frac{1}{\omega^2}$$

În urma rezolvării acestei ecuații se obțin următoarele rădăcini:

$$\alpha_1 = 35,34013464, \alpha_2 = 2,659865362$$

și deci:

$$\lambda_1 = 35,34013464 \frac{ml^3}{32EI}; \lambda_2 = 2,659865362 \frac{ml^3}{32EI}$$

Matricea spectrală va avea forma:

$$[\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} = \frac{32EI}{ml^3} \begin{bmatrix} 0,02829640 & 0 \\ 0 & 0,375958879 \end{bmatrix}$$

și utilizând date numerice, rezultă:

$$\omega_1 = 30,83438081 \text{ (rad s}^{-1}\text{);}$$

$$T_1 = 0,20377206 \text{ (s);}$$

$$\omega_2 = 112,3931419 \text{ (rad s}^{-1}\text{);}$$

$$T_2 = 0,055903633$$

4. Verificarea pulsațiilor proprii

Valorile pulsațiilor proprii determinate mai sus sunt corecte dacă verifică expresiile:

$$u([\Delta][m]) = u([\omega^2]^{-1})$$

$$\det([\Delta][m]) = \det([\omega^2]^{-1})$$

Utilizând matricele $[\Delta]$, $[m]$ și $[\omega^2]$, determinate anterior, cele două relații pentru verificare, exprimate prin intermediul erorilor absolute și relative, devin:

$$\varepsilon_a = u([\Delta][m]) - ([\omega^2]^{-1}) = 38 \frac{\text{ml}^3}{32EI} - 38 \frac{\text{ml}^3}{32EI} = 0$$

$$\varepsilon_r \% = 0$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \det([\Delta][m]) - \det([\omega^2]^{-1}) = 94 \left(\frac{\text{ml}^3}{32EI} \right)^2 - 94,00000002 \left(\frac{\text{ml}^3}{32EI} \right)^2 = \\ &= 0,00000002 \left(\frac{\text{ml}^3}{32EI} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_r \% = \frac{\varepsilon_a}{94 \left(\frac{\text{ml}^3}{EI} \right)^2} \cdot 100 = 1,81 \cdot 10^{-8} < 0,1$$

5. Calculul vectorilor (formelor) proprii de vibrație, $\{y_i\}$

Prima formă proprie de vibrație se determină rezolvând sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} (\delta_{11}m_1 - \lambda_1) \cdot y_{1,1} + \delta_{12}m_2 y_{2,1} = 0 \\ \delta_{21}m_1 y_{1,1} + (\delta_{22}m_2 - \lambda_2) \cdot y_{2,1} = 0 \end{cases}$$

Admițând $y_{2,1}=1$ din prima ecuație se obține $y_{1,1}$ și ordonatele formei proprii fundamentale de vibrație vor fi:

$$\{y_1\} = \begin{Bmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,238581045 \\ 1,0 \end{Bmatrix}$$

Cea de a doua formă proprie de vibrație se determină prin rezolvarea sistemului de ecuații al formelor proprii adimensionale:

$$\begin{cases} (\delta_{11}m_1 - \lambda_2) \cdot y_{1,2} + \delta_{12}m_2 y_{2,2} = 0 \\ \delta_{21}m_1 y_{1,2} + (\delta_{22}m_2 - \lambda_2) \cdot y_{2,2} = 0 \end{cases}$$

Considerând $y_{2,2}=1$, forma proprie de vibrație va rezulta:

$$\{y_2\} = \begin{Bmatrix} y_{1,2} \\ y_{2,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,095723903 \\ 1,0 \end{Bmatrix}.$$

Cele două forme proprii de vibrație sunt trasate în figura 3.6.

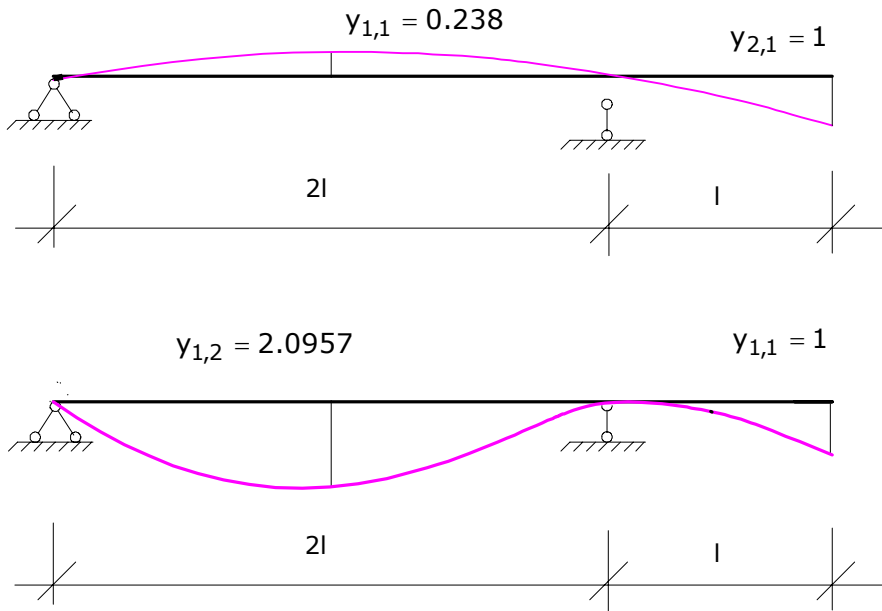


Fig. 3.6

6. Verificarea formelor proprii de vibrație

Formele proprii de vibrație vor fi verificate prin aplicarea condițiilor de ortogonalitate:

$$\sum_{j=1}^2 m_j y_{j,1} y_{j,2} = 0$$

$$m_1 y_{1,1} y_{1,2} + m_2 y_{2,1} y_{2,2} = 2m(-0,238581045) \cdot (2,095723903) + \\ + m \cdot 1 \cdot 1 = 2 \cdot 4 \cdot 10^{-9} = 0$$

$$\epsilon_r \% = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-9} m}{1 \cdot 1 \cdot m} \cdot 100 = 2,4 \cdot 10^{-7} < 0,1.$$

Aplicația 3.2

1. Constituirea matricei de inerție, [m]

Conform datelor numerice ale sistemului oscilant considerat, figura 3.1, matricea de inerție se constituie sub forma:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,53 \cdot 10^4 \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (\text{kg})$$

2. Determinarea matricei de flexibilitate, $[\Delta]$

Elementele matricei de flexibilitate se determină prin integrarea diagramelor de momente trasate în cele două stări de încărcare, reală și virtuală, și prezentate în figura 3.7. Matricea de flexibilitate este:

$$[\Delta] = \frac{l^3}{3EI} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 27 & 54 \\ 7 & 54 & 125 \end{bmatrix} = 2,7210884 \cdot 10^{-7} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 27 & 54 \\ 7 & 54 & 125 \end{bmatrix}, (\text{mN}^{-1})$$

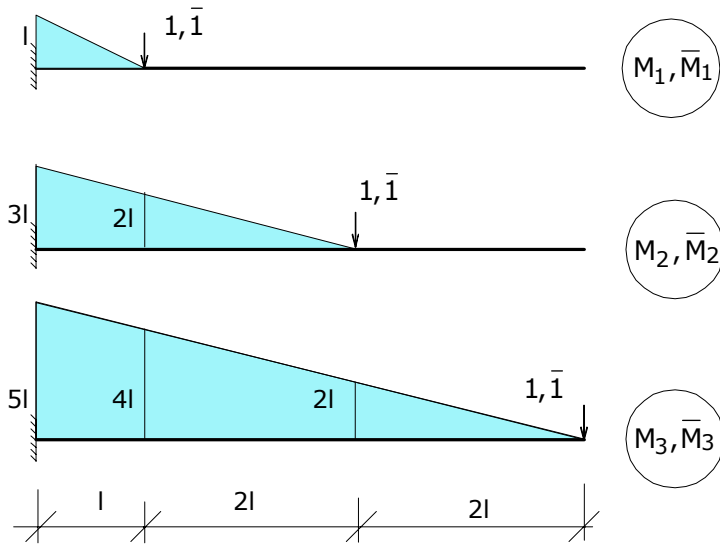


Fig. 3.7

3. Calculul valorilor (pulsărilor) proprii, ω_i

Ecuția caracteristică în care s-au introdus matricele de inerție și de flexibilitate este în acest caz:

$$\left| \frac{ml^3}{3EI} \begin{bmatrix} 1,5 & 8 & 7 \\ 6 & 54 & 54 \\ 10,5 & 108 & 125 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

sau:

$$a^3 - 180,5a^2 + 1065a - 480 = 0$$

unde:

$$\alpha = \frac{3EI}{ml^3} \lambda = \frac{3EI}{ml^3} \cdot \frac{1}{\omega^2}$$

Rădăcinile ecuației caracteristice sunt:

$$\alpha_1 = 174,409459, \alpha_2 = 5,59899808, \alpha_3 = 0,491542283$$

și rezultă pentru pulsațiile proprii valorile:

$$\omega_1 = 2,0326311 \text{ (rad s}^{-1}\text{)}, \omega_2 = 11,34458006 \text{ (rad s}^{-1}\text{)},$$

$$\omega_3 = 38,28804067 \text{ (rad s}^{-1}\text{)}.$$

Matricea spectrală este:

$$\begin{aligned} [\omega^2] &= \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{3EI}{ml^3} \begin{bmatrix} 5,7336339 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0,178603383 & 0 \\ 0 & 0 & 2,034412979 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Verificarea pulsațiilor proprii

Prin efectuarea produsului matriceal $[\Delta][m]$, matricea rezultantă este numită matricea dinamică, rezultă:

$$[\Delta][m] = \frac{ml^3}{3EI} \begin{bmatrix} 1,5 & 8 & 7 \\ 6 & 54 & 54 \\ 10,5 & 108 & 125 \end{bmatrix}$$

Dacă urma și determinantul matricei dinamice sunt egale cu urma și determinantul inversei matricei spectrale, exprimată în ω^2 , atunci rezultă că s-a calculat corect valorile proprii. Efectuând aceste verificări obținem:

$$\varepsilon_a = u([\Delta][m]) - u([\omega^2]^{-1}) = 6 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{3EI}{ml^3}$$

$$\varepsilon_r \% = \frac{\varepsilon_a}{u([\Delta][m])} \cdot 100 = 3,546 \cdot 10^{-7} < 0,1$$

și

$$\varepsilon_a = \det([\Delta][m]) - \det([\omega^2]^{-1}) = 1 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \left(\frac{3EI}{ml^3} \right)^3$$

$$\varepsilon_r \% = \frac{\varepsilon_a}{\det([\Delta][m])} \cdot 100 = 3,75 \cdot 10^{-7} < 0,1.$$

5. Calculul vectorilor (formelor) proprii de vibrație

Introducând succesiv valorile pulsațiilor proprii în sistemul de ecuații al formelor proprii:

$$\begin{cases} (\delta_{11}m_1 - \lambda_i) \cdot y_{1,i} + \delta_{12}m_2 y_{2,i} + \delta_{13}m_3 y_{3,i} = 0 \\ \delta_{21}m_1 y_{1,i} + (\delta_{22}m_2 - \lambda_i) \cdot y_{2,i} + \delta_{23}m_3 y_{3,i} = 0 \\ \delta_{31}m_1 y_{1,i} + \delta_{32}m_2 y_{2,i} + (\delta_{33}m_3 - \lambda_i) \cdot y_{3,i} = 0 \end{cases}$$

și admitând $y_{3,i}=1$ se obțin formele proprii care constituie matricea modală:

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0,061374457 & -0,378225022 & 9,636072984 \\ 0,45128037 & -1,068792955 & -2,08969652 \\ 1,0 & 1,0 & 1,0 \end{bmatrix}.$$

Formele proprii sunt trasate în figura 3.8.

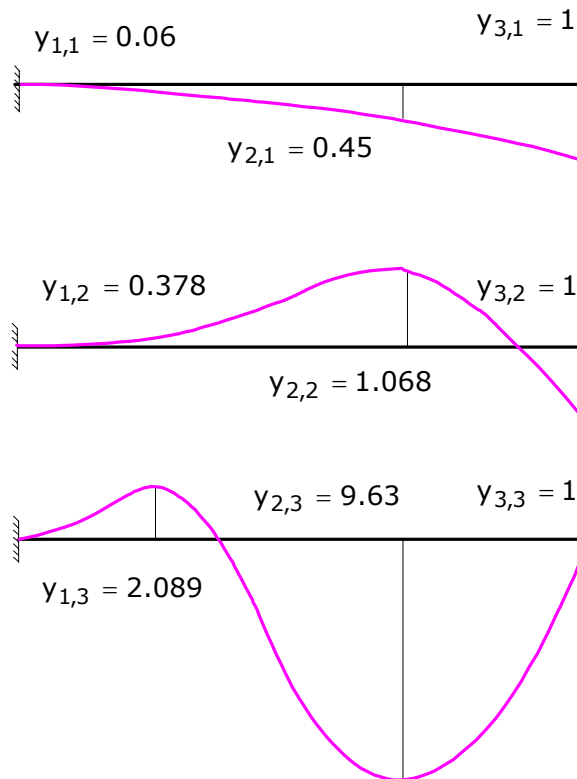


Fig. 3.8

6. Verificarea formelor proprii de vibrație

Formele proprii de vibrație vor fi verificate prin aplicarea următoarelor condiții:

- o ortogonalitatea formei 1 cu forma 2:

$$\sum_{j=1}^3 m_j y_{j,1} \cdot y_{j,2} = 0$$

și utilizând datele anterioare rezultă:

$$\varepsilon_a = -3 \cdot 10^{-9} \text{ m}, \varepsilon_r \% = 3 \cdot 10^{-7} < 0,1$$

- o ortogonalitatea formei 1 cu forma 3:

$$\varepsilon_a = -1,4 \cdot 10^{-8} \text{ m}, \varepsilon_r \% = 7,42 \cdot 10^{-7} < 0,1$$

- o ortogonalitatea formei 2 cu forma 3:

$$\varepsilon_a = -3,8 \cdot 10^{-8} \text{ m}, \varepsilon_r \% = 6,95 \cdot 10^{-7} < 0,1$$

Aplicația 3.3

1. Constituirea matricei de inerție, [m]

Ținând seama de datele numerice cuprinse în tabelul 2.1 matricea de inerție a sistemului oscilant considerat, figura 3.2, va fi:

$$[m] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Determinarea matricei de flexibilitate

Pentru determinarea coeficienților de flexibilitate utilizăm formula Mohr - Maxwell și diagramele de momente M și $\bar{M}$ din stările reală și virtuală de încărcare care sunt trasate în figura 3.9.a, b. și c, prin utilizarea metodelor Staticii Construcțiilor.

Integrând aceste diagrame elementele matricei de flexibilitate sunt:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_1}{EI} dx = 7,8014 \frac{1}{EI}$$

$$\delta_{12} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_2}{EI} dx = -0,2366 \frac{1}{EI}$$

$$\delta_{23} = 0,4726 \frac{1}{EI}, \delta_{13} = 3,6393 \frac{1}{EI}$$

$$\delta_{22} = 1,1574 \frac{1}{EI}, \delta_{33} = 3,2248 \frac{1}{EI}$$

și matricea de flexibilitate devine:

$$[\Delta] = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 7,8014 & -0,2366 & 3,6393 \\ -0,2366 & 1,1574 & 0,4726 \\ 3,6393 & 0,4726 & 3,2248 \end{bmatrix}$$

3. Calculul valorilor (pulsărilor) proprii, ω_i

Ținând seama de matricele de flexibilitate și inerție, determinate anterior, ecuația caracteristică va avea forma:

$$\left| \frac{m}{EI} \begin{bmatrix} 7,8014 & -0,2366 & 3,6393 \\ -0,2366 & 1,1574 & 0,432248726 \\ 3,6393 & 0,4726 & \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

Introducând notația:

$$\alpha = \frac{EI}{m} \lambda$$

și efectuând diferența celor două matrice ecuația caracteristică devine:

$$\begin{vmatrix} 7,8014 - \alpha & -0,2366 & 3,6393 \\ -0,2366 & 1,1574 - \alpha & 0,4726 \\ 3,6393 & 0,4726 & 3,2248 - \alpha \end{vmatrix} = 0$$

Prin dezvoltarea determinantului se obține ecuația caracteristică:

$$\alpha^3 - 12,1836\alpha^2 + 24,3958\alpha - 11,05178 = 0$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$\alpha_1 = 9,81208592,$$

$$\alpha_2 = 1,71460089,$$

$$\alpha_3 = 0,656913185.$$

Matricea spectrală are forma:

$$[\omega^2] = \frac{EI}{m} \begin{bmatrix} 0,101915128 & 0 & 0 \\ 0 & 0,851353007 & 0 \\ 0 & 0 & 1,52271166 \end{bmatrix}$$

iar perioadele proprii:

$$T_1 = 0,064521966 \text{ (s)},$$

$$T_2 = 0,022324 \text{ (s)}$$

și

$$T_3 = 0,016692373 \text{ (s)}.$$

4. Verificarea pulsațiilor proprii

$$U(\Delta \mathbb{I} \mathbb{m}) = 12,1836 \frac{\text{m}}{\text{EI}}, U\left([\omega^2]^{-1}\right) = 12,1836 \frac{\text{m}}{\text{EI}}, \varepsilon_r \% = 0$$

și

$$\det(\Delta \mathbb{I} \mathbb{m}) = 05978341 \left(\frac{\text{m}}{\text{EI}}\right)^3,$$

$$\det\left([\omega^2]^{-1}\right) = 11,05178343 \left(\frac{\text{m}}{\text{EI}}\right)^3$$

$$\varepsilon_r \% = 2,08 \cdot 10^{-7} < 0,1$$

5. Calculul vectorilor (formelor) proprii de vibrație

Prin introducerea în sistemul de ecuații al formelor proprii adimensionale a matricelor de inerție și de flexibilitate și a pulsațiilor proprii se obțin, în cazul analizat, trei sisteme de ecuații. Soluțiile acestor sisteme pentru $y_{3,i} = 1$ reprezintă formele proprii:

$$\{y_1\} = \begin{Bmatrix} 1,809374292 \\ 5,1419592 \cdot 10^{-3} \\ 1,0 \end{Bmatrix},$$

$$\{y_2\} = \begin{Bmatrix} -0,555758284 \\ 1,084155486 \\ 1,0 \end{Bmatrix},$$

$$\{y_3\} = \begin{Bmatrix} -0,54925585 \\ -1,203935681 \\ 1,0 \end{Bmatrix}.$$

Formele proprii de vibrație sunt trasate în figura 3.9.d, e și f.

6. Verificarea formelor proprii de vibrație

Aplicăm condițiile de ortogonalitate ale formelor proprii:

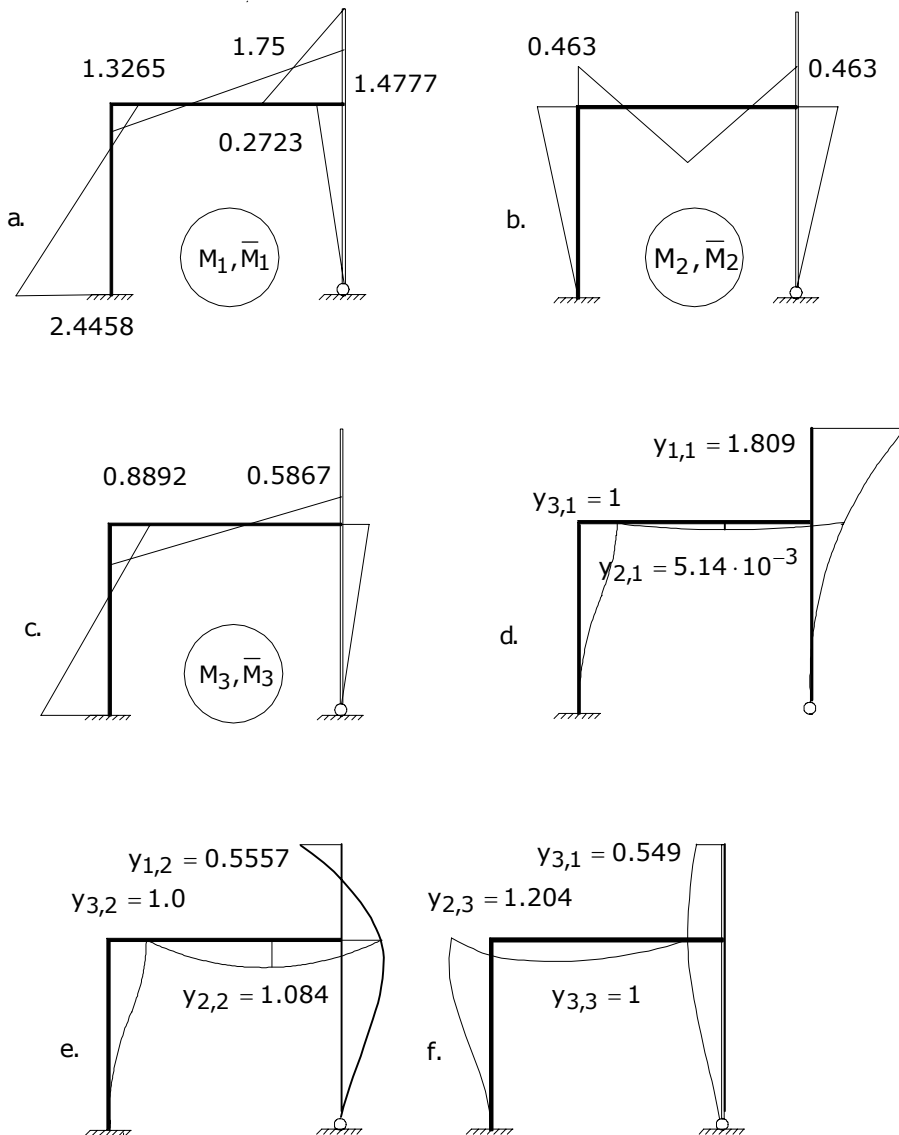


Fig. 3.9

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^3 m_j y_{j,1} y_{j,2} &= 0; m_1 y_{1,1} y_{1,2} + m_2 y_{2,1} y_{2,2} + m_3 y_{3,1} y_{3,2} = \\
 &= (1,089374292)(-0,555758284)m + \\
 &5,1419592 \cdot 10^{-3} \cdot 1,084155486m + m \cdot 1 \cdot 1
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_a = 4,005574683\text{m} - 1,005574687\text{m} = -3,2 \cdot 10^{-9}$$

$$\varepsilon_r \% = 3,18 \cdot 10^{-7} < 0,1$$

$$\sum_{j=1}^3 m_j y_{j,1} y_{j,3} = 0; \varepsilon_a = -3 \cdot 10^{-9}; \varepsilon_r \% = 3 \cdot 10^{-7} < 0,1$$

$$\sum_{j=1}^3 m_j y_{j,2} y_{j,3} = 0; \varepsilon_a = -4,4 \cdot 10^{-9}; \varepsilon_r \% = 3,37 \cdot 10^{-7} < 0,1$$

și din calculele efectuate a rezultat corectitudinea formelor proprii.

Aplicația 3.4

1. Constituirea matricei de inerție, [m]

Conform datelor numerice ale sistemului dinamic considerat, figura 3.3, matricea de inerție se constituie sub forma:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,53 \cdot 10^4 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, (\text{kg})$$

2. Determinarea matricei de flexibilitate, [Δ]

Eforturile din barele grinzii cu zăbrele și valorile coeficienților de flexibilitate sunt cuprinse în tabelul 3.1 și au fost determinate aplicând metoda izolării nodurilor și corespunzător formulei Mohr - Maxwell.

Tabelul 3.1

Bara	l_{kr}	N_{kr}^1	N_{kr}^2	$(N_{kr}^1)^2 l_{kr}$		$(N_{kr}^1)^2 \cdot (N_{kr}^2)^2 l_{kr}$
1,2	4.3	-1.024	-0.4095	4.5089	0.7211	1.8031
1,3	5.0	0.5952	0.328	1.7713	0.2832	0.7083
2,3	4.3	-0.2048	0.4095	0.1804	0.7211	-0.3606
2,4	5.0	0.4761	-0.476	1.1334	1.1329	1.1331
3,4	4.3	0.2048	-0.4095	0.1804	0.7211	-0.3606
3,5	5.0	0.3571	0.714	0.6376	2.549	1.2748
4,5	4.3	-0.2048	0.4095	0.1804	0.7211	-0.3606
4,6	5.0	-0.2380	-0.952	0.2833	4.5315	1.1331
5,6	4.3	0.2048	0.819	0.1804	2.8843	0.7212
5,7	5.0	0.1190	0.476	0.0709	1.1329	0.2833
6,7	4.3	-0.2048	-0.819	0.1804	2.8843	0.7212
$\delta_{ij} = \sum \frac{N_{kr}^1 \cdot N_{kr}^2}{EA_{kr}}$		$\sum$		9.3074	18.2825	6.6963

Matricea de flexibilitate se constituie sub forma:

$$[\Delta] = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 9,3074 & 6,6963 \\ 6,6963 & 18,2825 \end{bmatrix}.$$

3. Calculul pulsațiilor proprii, ω_i

Ținând seama de matricele de flexibilitate și de inerție, ecuația caracteristică este:

$$\lambda^2 - 36,8973 \frac{m}{EA} + 250,6442 \left(\frac{m}{EA} \right)^2 = 0$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$\lambda_1 = 27,9201 \frac{m}{EA}; \lambda_2 = 8,9772 \frac{m}{EA}$$

Matricea spectrală va avea forma:

$$[\omega^2] = \frac{EA}{m} \begin{bmatrix} 0,0358 & 0 \\ 0 & 0,1114 \end{bmatrix}$$

4. Verificarea pulsațiilor proprii

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= u([\Delta][m]) - u([\omega^2]^{-1}) = (\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2) - (\lambda_1 + \lambda_2) = \\ &= 36,8973 \frac{m}{EA} - 36,8973 \frac{m}{EA} = 0 \\ \varepsilon_r \% &= 0 \\ \varepsilon_a &= \det([\Delta][m]) - \det([\omega^2]^{-1}) = m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) - (\lambda_1 \cdot \lambda_2) = \\ &= 250,6442 \left(\frac{m}{EA} \right)^2 - 250,6443217 \left(\frac{m}{EA} \right)^2 = -1,217 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{m}{EA} \right)^2 \\ \varepsilon_r \% &= \frac{\varepsilon_a}{250,0644 \left(\frac{m}{EA} \right)^2} = 4,86 \cdot 10^{-5} < 0,1 \end{aligned}$$

5. Calculul valorilor (formelor) proprii de vibrație

Prima formă proprie de vibrație se determină rezolvând următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} -9,3053y_{1,1} + 6,6963y_{2,1} = 0 \\ 13,3926y_{1,1} - 9,6376y_{2,1} = 0 \end{cases}$$

obținut prin introducerea matricei de flexibilitate și de inerție și a valorii proprii

$$\lambda_1 = 27,9507 \frac{m}{EA}$$

în sistemul de ecuații ale formelor proprii.

Admițând $y_{2,1}=1$, rezultă $y_{1,1}=0,7196$.

Cea de a doua formă proprie de vibrație se determină identic, folosind cea de a doua valoare proprie

$$\lambda_2 = 8,9772 \frac{m}{AE} \text{ rezulta : } y_{2,2} = 1; y_{1,2} = -0,9648.$$

Matricea modală devine:

$$[y] = \begin{bmatrix} 0,7196 & -0,6948 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Verificarea formelor proprii de vibrație

Prin aplicarea condiției de ortogonalitate a celor două forme proprii de vibrație se obține o eroare absolută:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= m_1 y_{1,1} y_{1,2} + m_2 y_{2,1} y_{2,2} = \\ &= 2m \cdot 0,7196 \cdot (-0,6948) + m \cdot 1 \cdot 1 = 4,384 \cdot 10^{-5} m \end{aligned}$$

și o eroare relativă:

$$\varepsilon_r \% = \frac{\varepsilon_a}{m} = 4,384 \cdot 10^{-3} < 0,1,$$

atestând corectitudinea valorilor ordonatei formelor proprii de vibrație.

Aplicația 3.5

1. Constituirea matricei de inerție [m]

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2-3. Determinarea matricei de rigiditate, [k]

Matricea de rigiditate, în coordonatele dinamice ale sistemului oscilant, se va determina din matricea de rigiditate a structurii în coordonatele statice, patru rotații: $Z_3, \dots, Z_6$ și două translații, pe direcția gradelor de libertate: Z_1 și Z_2 , figura 3.4, prin procedeul de condensare.

Dacă se notează matricea de rigiditate a structurii cu $[R]$, aceasta are forma:

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & | & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} \\ r_{21} & r_{22} & | & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ r_{31} & r_{32} & | & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} \\ \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{61} & r_{62} & | & r_{63} & r_{64} & r_{65} & r_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{11}] & [R_{12}] \\ [R_{21}] & [R_{22}] \end{bmatrix}$$

în care: r_{ij} reprezintă reacțiunea din blocajul i , când în blocajul j se produce, pe sistemul de bază din metoda deplasărilor, o deplasare egală cu unitatea, atunci matricea de rigiditate a sistemului oscilant se calculează cu relația:

$$[K] = [R_{11}] - [R_{12}][R_{22}]^{-1}[R_{21}]$$

Coeficienții de rigiditate r_{ij} se determină prin scrierea ecuațiilor de echilibru static pe noduri ($\sum_j M = 0$), în deformată și ecuații de lucru

mecanic virtual, $LMV=0$, în deplasate, figura 3.10. Constituim matricea de rigiditate $[R]$, care are forma:

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{54EI}{a^3} & -\frac{24EI}{a^3} & | & -\frac{6EI}{a^2} & 0 & \frac{6EI}{a^2} & \frac{6EI}{a^2} \\ & [R_{11}] & & & [R_{12}] & & \\ -\frac{24EI}{a^3} & \frac{24EI}{a^3} & | & -\frac{6EI}{a^2} & -\frac{6EI}{a^2} & -\frac{6EI}{a^2} & -\frac{6EI}{a^2} \\ -\frac{6EI}{a^2} & - & -\frac{6EI}{a^2} & | & \frac{12EI}{a} & 0 & \frac{2EI}{a} \\ 0 & -\frac{6EI}{a^2} & | & 0 & \frac{14EI}{a} & 0 & \frac{2EI}{a} \\ & [R_{21}] & & & [R_{22}] & & \\ \frac{6EI}{a^2} & -\frac{6EI}{a^2} & | & \frac{2EI}{a} & 0 & \frac{10EI}{1,5a} & \frac{2EI}{1,5a} \\ \frac{6EI}{a^2} & -\frac{6EI}{a^2} & | & 0 & \frac{2EI}{a} & \frac{2EI}{1,5a} & \frac{10EI}{1,5a} \end{bmatrix}$$

care prin condensare ne conduce la matricea de rigiditate a sistemului oscilant:

$$[K] = \frac{EI}{a^3} \begin{bmatrix} 39,90468365 & -18,43878389 \\ -18,43878389 & 11,738701173 \end{bmatrix}.$$

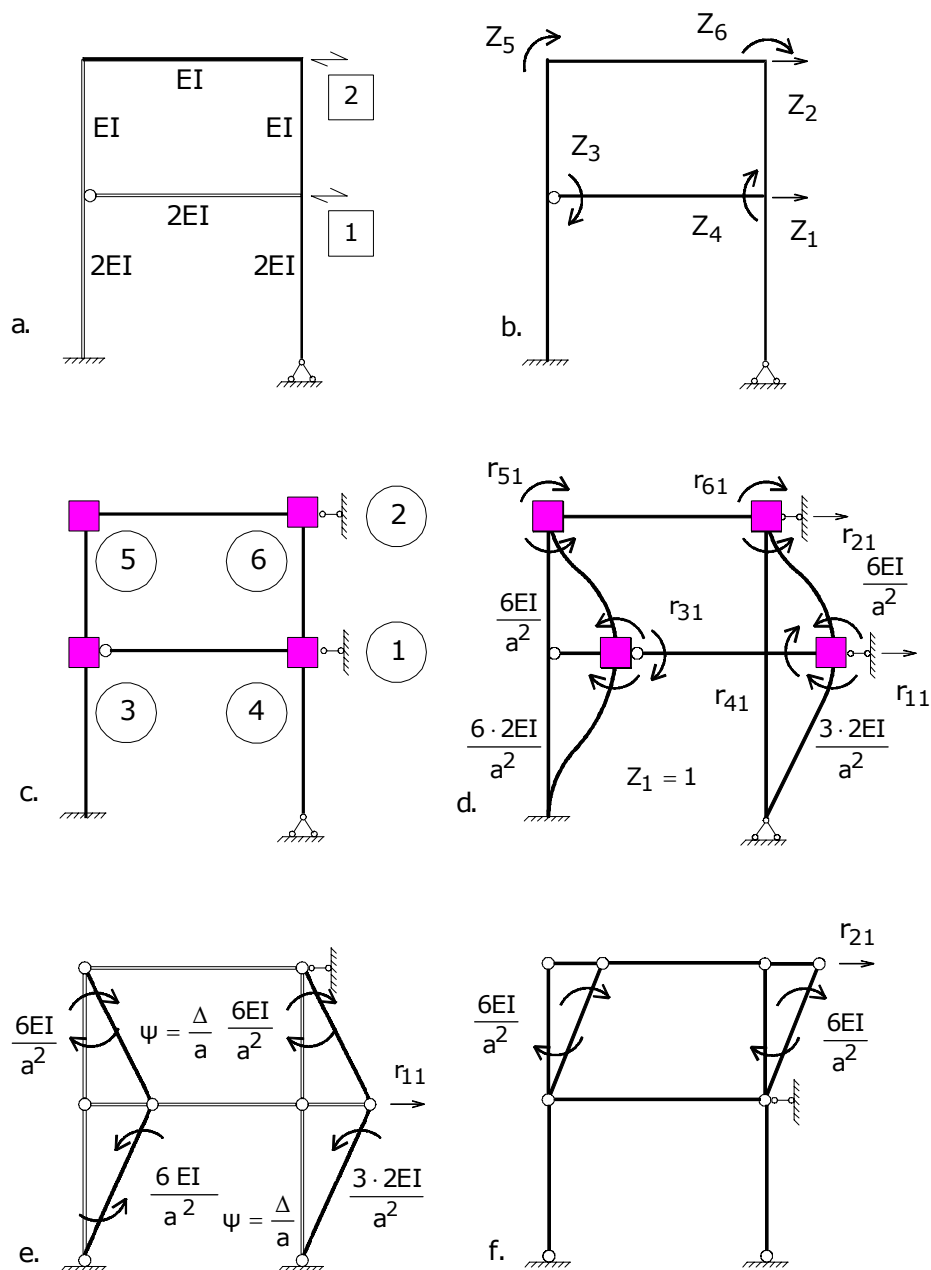


Fig.3.10.a

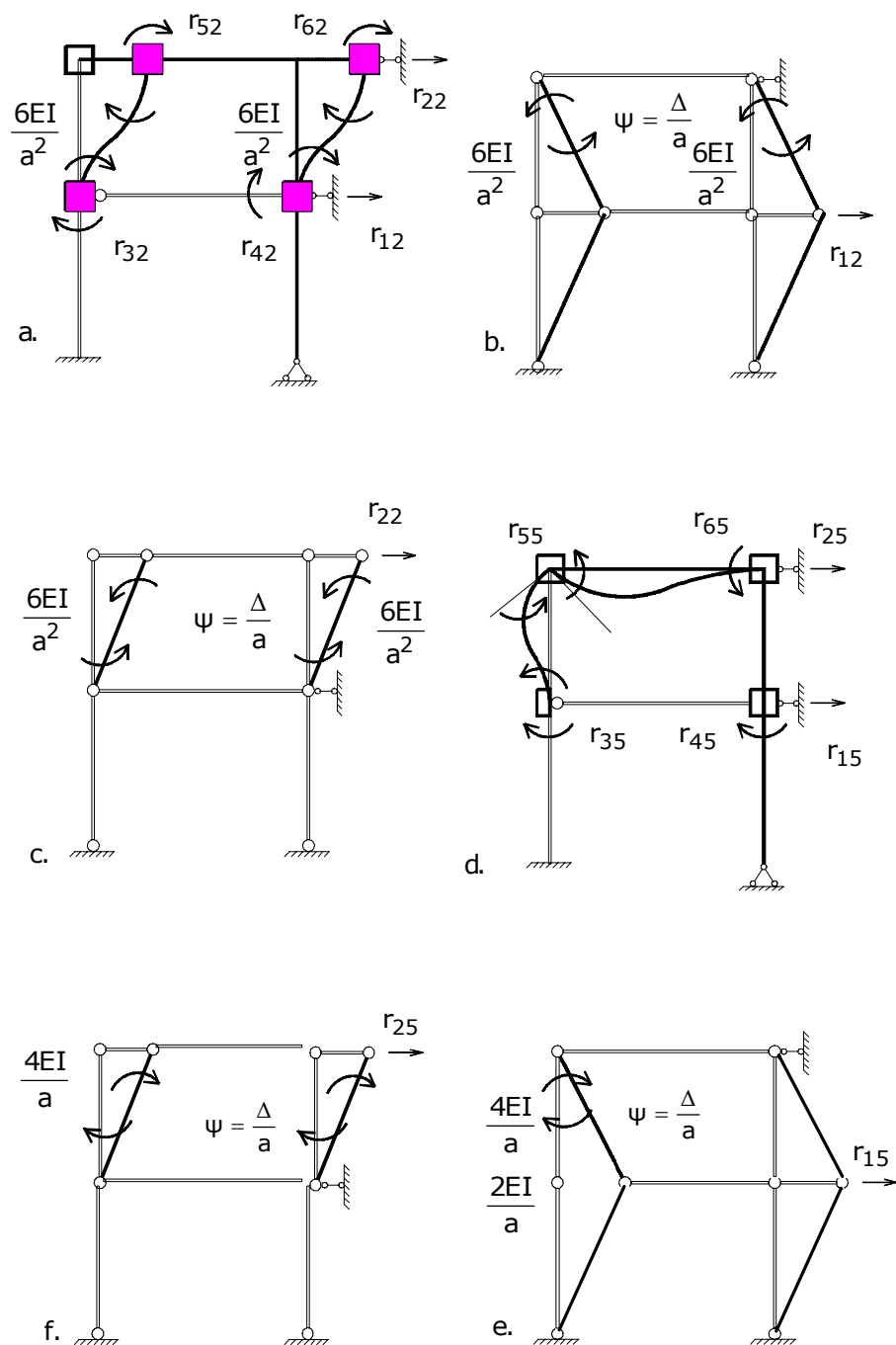


Fig.3.10.b

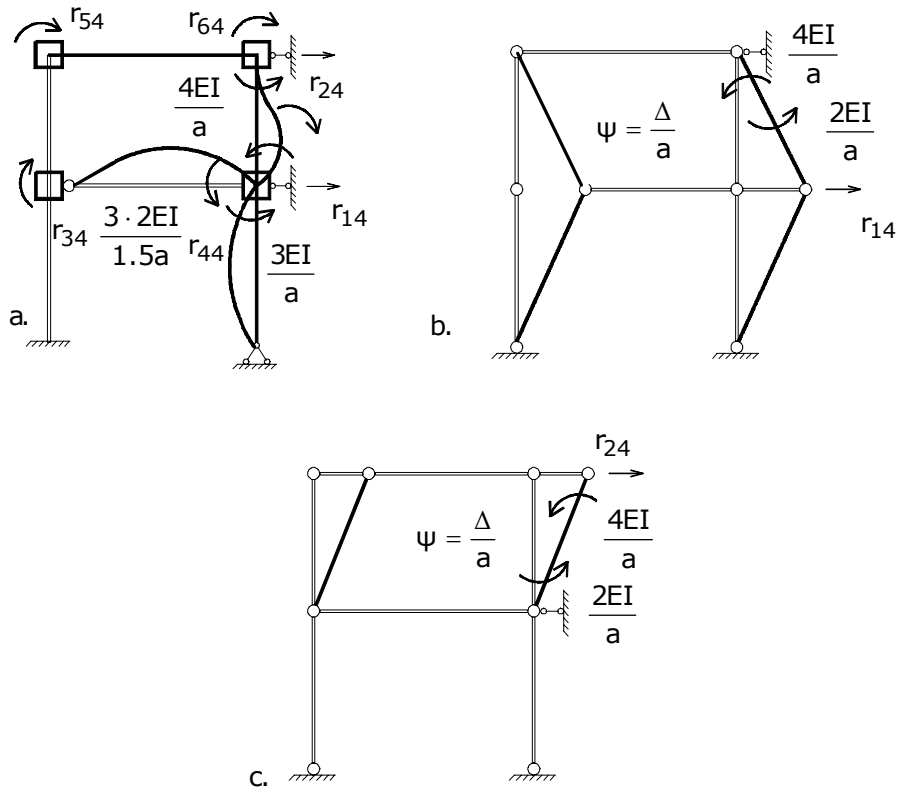


Fig. 3.10.c

4. Calculul valorilor proprii, ω_i

Introducând matricele de inerție și de flexibilitate, deduse la punctele 1, 2 și 3 în ecuația caracteristică (3.24) se obține:

$$\left[\frac{EI}{a^3} \begin{bmatrix} 39,90468365 & -18,43878389 \\ -18,43878389 & 11,73870177 \end{bmatrix} - \omega^2 m \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0$$

și prin dezvoltarea determinantului:

$$1,5m^2\omega^4 - 57,51273625 \frac{mEI}{a^3} \omega^2 + 128,4404277 \left(\frac{EI}{a^3} \right)^2 = 0$$

Rădăcinile ecuației de mai sus sunt:

$$\omega_1^2 = 2,381125963 \frac{EI}{ma^3},$$

$$\omega_2^2 = 35,96069821 \frac{EI}{ma^3}.$$

5. *Constituirea matricei spectrale, $[\omega^2]$*

$$[\omega^2] = \frac{EI}{ma^3} \begin{bmatrix} 2,381125953 & 0 \\ 0 & 35,96069821 \end{bmatrix}$$

6. *Verificarea pulsațiilor proprii*

Efectuând produsul matriceal:

$$[m]^{-1}[K] = \frac{EI}{ma^3} \begin{bmatrix} 26,60312243 & -12,29052259 \\ -18,43878389 & 11,73870173 \end{bmatrix}$$

verificarea pulsațiilor proprii se efectuează prin intermediul erorilor relative, rezultă:

$$\varepsilon_r \% = \frac{u([m]^{-1}[K]) - u([\omega^2])}{u([m]^{-1}[K])} \cdot 100 = 0$$

sau

$$\varepsilon_r \% = \frac{\det([m]^{-1}[K]) - \det([\omega^2])}{\det([m]^{-1}[K])} \cdot 100 = 0$$

7-8. *Determinarea vectorilor proprii, $\{X_i\}$*

Prin introducerea succesiv a valorilor proprii ω_1^2, ω_2^2 în sistemul de ecuații al formelor proprii de vibrație se obțin două sisteme de ecuații:

$$\begin{cases} (K_{11} - \omega_1^2 m_1) \cdot X_{1,1} + K_{12} X_{2,1} = 0 \\ K_{21} X_{1,1} + (K_{22} - \omega_1^2 m_2) \cdot X_{2,1} = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \left(39,90468365 \frac{EI}{a^3} - 2,381125953 \frac{EI}{ma^3} \cdot 1,5m \right) \cdot X_{1,1} - \\ \quad - 18,43878384 \frac{EI}{a^3} \cdot X_{2,1} = 0 \\ - 18,43878389 \frac{EI}{a^3} \cdot X_{1,1} + \\ \quad + \left(11,73870173 \frac{EI}{a^3} - 2,381125953 \frac{EI}{ma^3} m \right) \cdot X_{2,1} = 0 \end{cases}$$

și

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(39,90468365 \frac{EI}{a^3} - 35,96069821 \frac{EI}{ma^3} \cdot 1,5m \right) \cdot X_{1,2} - \\ &\quad - 18,43878389 \frac{EI}{a^3} \cdot X_{2,2} = 0 \\ &- 18,43878389 \frac{EI}{a^3} \cdot X_{1,2} + \\ &\quad + \left(11,73870173 \frac{EI}{a^3} - 35,96069821 \frac{EI}{ma^3} m \right) \cdot X_{2,2} = 0 \end{aligned} \right.$$

Rezolvând sistemele de ecuații ale formelor proprii pentru $X_{2,1}=1$, respectiv $X_{2,2}=1$, stabilim următoarea soluții:

$$X_{1,1}=0,507494194$$

și

$$X_{1,2}=-1,313643927.$$

Matricea modală are forma:

$$[X] = \begin{bmatrix} 0,507494194 & -1,313643927 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Verificarea formelor proprii de vibrație

Aplicăm condiția de ortogonalitate:

$$\{X_1\}^T [m] \{X_2\} = 0$$

și determinăm eroarea absolută și cea relativă:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= X_{1,1}X_{1,2}m_1 + X_{2,1}X_{2,2}m_2 = \\ &= 0,507494194(-1,313643927) \cdot 1,5m + 1 \cdot 1 \cdot m = 1,09 \cdot 10^{-9}m \end{aligned}$$

$$\varepsilon_r \% = \frac{1,09 \cdot 10^{-9} \cdot m}{1 \cdot 1 \cdot m} = 1,09 \cdot 10^{-7} < 0,1.$$

PROBLEME REZOLVATE 5

SISTEME CU n GLD – VIBRAȚII FORȚATE

Problema 4.1

Să se traseze diagramele de eforturi maxime și minime, pentru următoarele structuri, acționate de încărcările gravitaționale și forțe perturbatoare $F(t)$ de tip armonic.

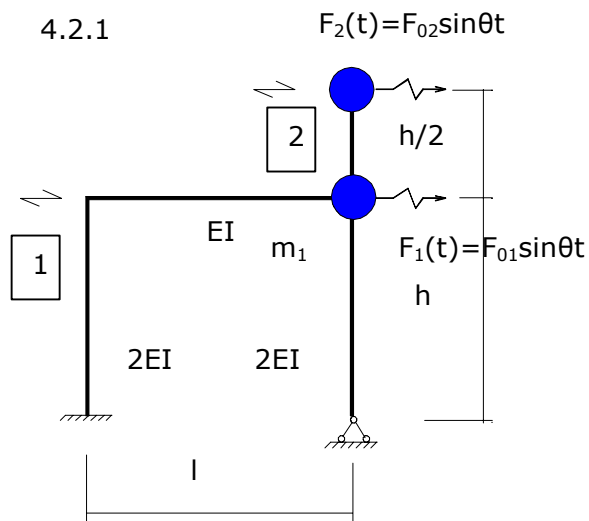


Fig. 4.1

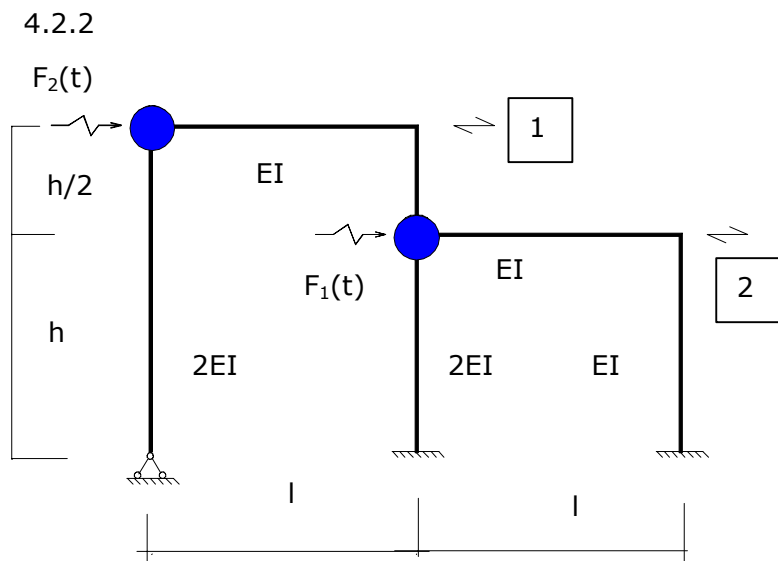


Fig. 4.2

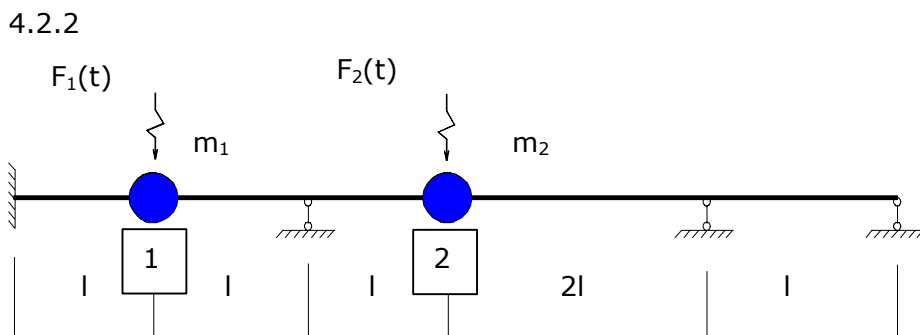


Fig. 4.3

Obs.1. Sistemul dinamic 4.2.1 se va rezolva prin metoda forțelor de inerție.

Obs.2. Sistemul dinamic 4.2.2 se va rezolva prin metoda matricei de rigiditate.

Obs.3. Sistemul vibrant 4.2.3 se va rezolva prin efectuarea unei analize modale.

Breviar teoretic

RĂSPUNSUL FORȚAT AL SISTEMELOR CU N GLD UTILIZÂND METODA MATRICEI DE FLEXIBILITATE

1. Constituirea matricei de inerție, $[m]$

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix}$$

2-3. Determinarea matricei de flexibilitate, $[\Delta]$

Elementele matricei de flexibilitate se calculează în conformitate cu următoarele etape :

- constituirea celor două stări de încărcare: reală și virtuală;
- trasarea diagramelor de eforturi - $(\overline{M}_j, M_k)$;
- calculul coeficienților de flexibilitate și constituirea matricei de flexibilitate.

4. Calculul pulsațiilor proprii, ω_i

Rădăcinile următoarei ecuației caracteristice:

$$|\omega^2 [\Delta][m] - [I]| = 0$$

reprezintă pulsațiile proprii, ω_i , cu ajutorul cărora se constituie matricea spectrală.

5. Verificarea situației de rezonanță $\theta = \omega_i$

În cazul fenomenului de rezonanță, $\theta = \omega_1$, răspunsul sistemului este puternic amplificat. Această situație se poate evita prin respectarea următoarei condiții:

$$1,3 \leq \frac{\theta}{\omega_i} \leq 0,7 \quad (4.1)$$

6. Constituirea vectorului amplitudinilor forțelor perturbatoare, $\{F_o\}$.

În cazul excitației de tip armonic:

$$F_k = F_{o,k} \sin \theta t$$

se constituie vectorul amplitudinilor forțelor perturbatoare:

$$\{F_o\} = \begin{Bmatrix} F_{o,1} \\ \vdots \\ F_{o,k} \\ \vdots \\ F_{o,n} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

7. Determinarea vectorului $\{\Delta_o\}$

Un element al vectorului $\{\Delta_o\}$, $\Delta_{o,j}$, reprezintă deplasarea măsurată, în sistemul dinamic, pe direcția GLD când acesta este acționat de amplitudinile forțelor perturbatoare.

Acest vector se determină cu relația:

$$\{\Delta_o\} = [\Delta]\{F_o\} \quad (4.3)$$

8. Determinarea amplitudinilor forțelor de inerție, I_j .

Amplitudinile forțelor de inerție se determină prin rezolvarea sistemului de ecuații:

$$\left([\Delta] - \frac{1}{\theta^2} [m]^{-1} \right) \{I\} + \{\Delta_o\} = \{0\} \quad (4.4)$$

9. Calculul forțelor dinamice, F_d

Valorile forțelor dinamice maxime se determină cu relația:

$$\{F_d\} = \{I\} + \{F_o\} \quad (4.5)$$

10. Determinarea răspunsului dinamic în eforturi

Sistemul oscilant se încarcă cu ansamblul de forțe dinamice aplicate în dreptul maselor și pe direcția GLD și cu forțele gravitaționale aplicate în dreptul maselor și pe direcție verticală. Diagramele de eforturi trasate prin metodele staticii construcțiilor, pentru încărcările de mai sus, reprezintă răspunsul dinamic în eforturi.

RĂSPUNSUL FORȚAT AL SISTEMELOR CU N GLD UTILIZÎND METODA MATRICEI DE RIGIDITATE

1. Constituirea matricei de inerție, $[m]$

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & m_2 & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & & & m_n \end{bmatrix}$$

2-3. Determinarea matricei de rigiditate, $[K]$

Aflarea elementelor matricei de rigiditate presupune parcurgerea următoarelor etape:

- constituirea sistemului de bază dinamic (sistemul oscilant cu deplasările pe direcțiile GLD blocate);
- calculul coeficienților de rigiditate (reacțiunile din blocajele GLD produse de deplasări succesive egale cu unitatea) și constituirea matricei de rigiditate.

4. Calculul pulsațiilor proprii, ω_i

Rădăcinile ecuației caracteristice:

$$[K] - \omega^2 [m] = 0$$

reprezintă pulsațiile proprii, cu ajutorul cărora se constituie matricea spectrală.

5. Verificarea situației de rezonanță, $\theta = \omega_i$

Fenomenul de rezonanță ($\theta = \omega_i$) produce o puternică amplificare a răspunsului sistemului și pentru evitarea acestei situații este necesar să se respecte condiția:

$$1,3 \leq \frac{\theta}{\omega_i} \leq 0,7$$

6. Constituirea vectorului amplitudinilor forțelor perturbatoare, $\{F_o\}$

În cazul excitației de tip armonic:

$$F_k = F_{o,k} \sin \theta t$$

se constituie vectorul amplitudinilor forțelor perturbatoare:

$$\{F_o\} = \begin{Bmatrix} F_{o,1} \\ \vdots \\ F_{o,k} \\ \vdots \\ F_{o,n} \end{Bmatrix}$$

7. Determinarea vectorului $\{R_o\}$

Un element al vectorului $\{R_o\}$, $R_{o,j}$ reprezintă reacțiunea din blocajul GLD ce se produce când sistemul de bază dinamic este acționat de amplitudinile forțelor perturbatoare.

În cazul în care forțele perturbatoare acționează în dreptul maselor și pe direcția GLD, atunci:

$$\{R_o\} = -\{F_o\}. \quad (4.6)$$

8. Calculul deplasărilor maxime, y_j

Amplitudinile deplasărilor maxime, care se produc pe direcțiile GLD, reprezintă soluțiile sistemului de ecuații:

$$. ([K] - \theta^2 [m]) \{y\} + \{R_o\} = \{0\} \quad (4.7)$$

9. Determinarea forțelor dinamice maxime, F_d

Amplitudinile forțelor dinamice maxime se determină cu relația:

$$\{F_d\} = \begin{Bmatrix} F_{d1} \\ F_{d2} \\ \vdots \\ F_{dj} \\ \vdots \\ F_{dn} \end{Bmatrix} = [K] \{y\}. \quad (4.8)$$

10. Determinarea răspunsului dinamic în eforturi

Diagramele de eforturi maxime și minime se trasează aplicând metodele Staticii Construcțiilor în cazul acționării sistemului oscilant cu forțele dinamice maxime, F_d , în dreptul maselor și pe direcțiile GLD și cu forțele gravitaționale aplicate pe direcții verticale.

RĂSPUNSUL FORȚAT AL SISTEMELOR CU N GLD UTILIZÎND METODA ANALIZEI MODALE

1. Constituirea matricei maselor, $[m]$

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & m_2 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & m_n \end{bmatrix}$$

2-3. Determinarea modurilor proprii de vibrații, $[\omega^2]$, $[y]$

Se realizează următoarele:

- stabilirea situațiilor de încărcare;
- calculul coeficienților de rigiditate;
- determinarea pulsațiilor proprii și constituirea matricei spectrale;
- calculul formelor proprii de vibrație;
- verificarea pulsațiilor și formelor proprii de vibrație.

4. Verificarea eventualei rezonanțe, $\theta = \omega_i$

Pentru evitarea amplificării răspunsului dinamic, în cazul situației de rezonanță, $\theta = \omega_i$, se impune respectarea condiției:

$$1,3 \leq \frac{\theta}{\omega_i} \leq 0,7$$

Dacă acest fenomen este greu de evitat atunci în determinarea răspunsului trebuie inclusă influența amortizării sistemului, care se poate face prin aplicarea metodei analizei modale.

5. Determinarea factorilor de amplificare dinamică, μ_i

Factorii de amplificare dinamică se determină cu relația:

$$\mu_i = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_i^2}\right)^2 + 4\nu_i^2 \left(\frac{\theta}{\omega_i}\right)^2}} \quad (4.9)$$

prin introducerea succesivă a pulsațiilor proprii în sistemul de ecuații de echilibru.

6. Calculul deplasărilor maxime, y_j

Deplasările maxime măsurate pe direcția GLD se determină prin aplicarea principiului superpoziției cu relația:

$$y_j = \sum_{i=1}^n y_{j,i} \frac{\sum_{j=1}^n F_{0,j} \cdot y_{j,i}}{\omega_i^2 \sum_{j=1}^n m_j \cdot y_{j,i}^2} \mu_i \quad (4.10)$$

7. Determinarea forțelor dinamice maxime, F_d

Forțele dinamice maxime se determină cu relația:

$$\{F_d\} = \begin{Bmatrix} F_{d,1} \\ F_{d,2} \\ \vdots \\ F_{d,j} \\ \vdots \\ F_{d,n} \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

8. Calculul răspunsului dinamic în eforturi

Diagramele de eforturi (maxime și minime) se trasează prin acționarea sistemului oscilant în dreptul maselor și pe direcția gradelor de libertate cu amplitudinile forțelor dinamice (F_d) și pe direcția verticală cu forțele gravitaționale utilizând metodele staticii construcțiilor.

Aplicații

Aplicația 4.1

1. Constituirea matricei de inerție, $[m]$

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,78 \cdot 10^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (kg)}$$

2-3. Determinarea matricei de flexibilitate, $[\Delta]$

Integrând diagramele de momente încovoietoare trasate în figura 4.4, rezultă următoarea matrice de flexibilitate:

$$[\Delta] = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 3,224819 & 3,6393475 \\ 3,6393475 & 7,8013729 \end{bmatrix} = 10^{-8} \begin{bmatrix} 2,9653508 & 3,3465264 \\ 3,3465264 & 7,1736762 \end{bmatrix} \text{ (mN}^{-1}\text{)}$$

4. Calculul pulsațiilor proprii, ω_i

Matricea spectrală are forma:

$$[\omega^2] = \frac{EI}{m} \begin{bmatrix} 0,101915383 & 0 \\ 0 & 0,823634488 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 622,657009 & 0 \\ 0 & 5032,03655 \end{bmatrix} \text{ (rad s}^{-1}\text{)},$$

$$\omega_1 = 24,95309618 \text{ (rads}^{-1}\text{)}$$

$$\omega_2 = 70,93684903 \text{ (rads}^{-1}\text{)}$$

5. Verificarea condiției de rezonanță, $\theta = \omega_i$

Pentru a evita fenomenul de rezonanță, în situația când răspunsul sistemului este puternic amplificat, este necesar să fie satisfăcută condiția:

$$0,7 \geq \frac{\theta}{\omega_i} \geq 1,3$$

În cazul sistemului oscilant de față

$$\frac{\theta}{\omega_1} = \frac{15}{24,95309618} = 0,6011, \frac{\theta}{\omega_2} = \frac{15}{70,93684903} = 0,2114$$

este satisfăcută condiția de mai sus.

6. Constituirea vectorului amplitudinilor forțelor perturbatoare, $\{F_o\}$

$$\{F_0\} = \begin{Bmatrix} F_{0,1} \\ F_{0,2} \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \end{Bmatrix} \text{ (N)}$$

7. Determinarea vectorului $\{\Delta_0\}$

$$\{\Delta_0\} = \begin{Bmatrix} \Delta_{0,1} \\ \Delta_{0,2} \end{Bmatrix} = [\Delta]\{F_0\} = \frac{10^3}{EI} \begin{Bmatrix} 27,8711945 \\ 49,924907 \end{Bmatrix}$$

8. Determinarea amplitudinilor forțelor de inerție, I_j .

Introducând în ecuația amplitudinilor forțelor de inerție matricele de inerție și de flexibilitate, determinate anterior și a pulsațiilor forțelor perturbatoare

$$\theta = 15 \text{rads}^{-1}, \theta^2 = 3,6827586 \cdot 10^{-2} \frac{EI}{m}$$

aceasta devine:

$$\left(\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 3,224819 & 3,6393475 \\ 3,6393475 & 7,8013729 \end{bmatrix} - \frac{1}{3,6827586 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{m}{EI} \cdot \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} + \frac{10^3}{EI} \begin{Bmatrix} 27,8711945 \\ 49,924907 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

sau

$$\begin{cases} -23,9287392I_1 + 3,6393475I_2 + 2,78711945 \cdot 10^4 = 0 \\ 3,6393475I_1 - 19,35218532I_2 + 4,9924907 \cdot 10^4 = 0 \end{cases}$$

Soluțiile sistemului de mai sus reprezintă amplitudinile forțelor de inerție:

$$I_1 = 1602,972097 \text{ (N)},$$

$$I_2 = 2881,260106 \text{ (N)}.$$

9. Calculul forțelor dinamice maxime, F_d

$$F_{d1} = I_1 + F_{0,1} = 4,6029721 \cdot 10^3 \text{ (N)}$$

$$F_{d2} = I_2 + F_{0,2} = 7,8812601 \cdot 10^3 \text{ (N)},$$

10. Determinarea răspunsului dinamic în eforturi

În vederea trasării diagramelor de eforturi dinamice se va încărca sistemul oscilant cu forțele dinamice și forțele gravitaționale. Pentru sistemul oscilant luat în studiu diagramele de eforturi sunt prezentate în figura 4.4

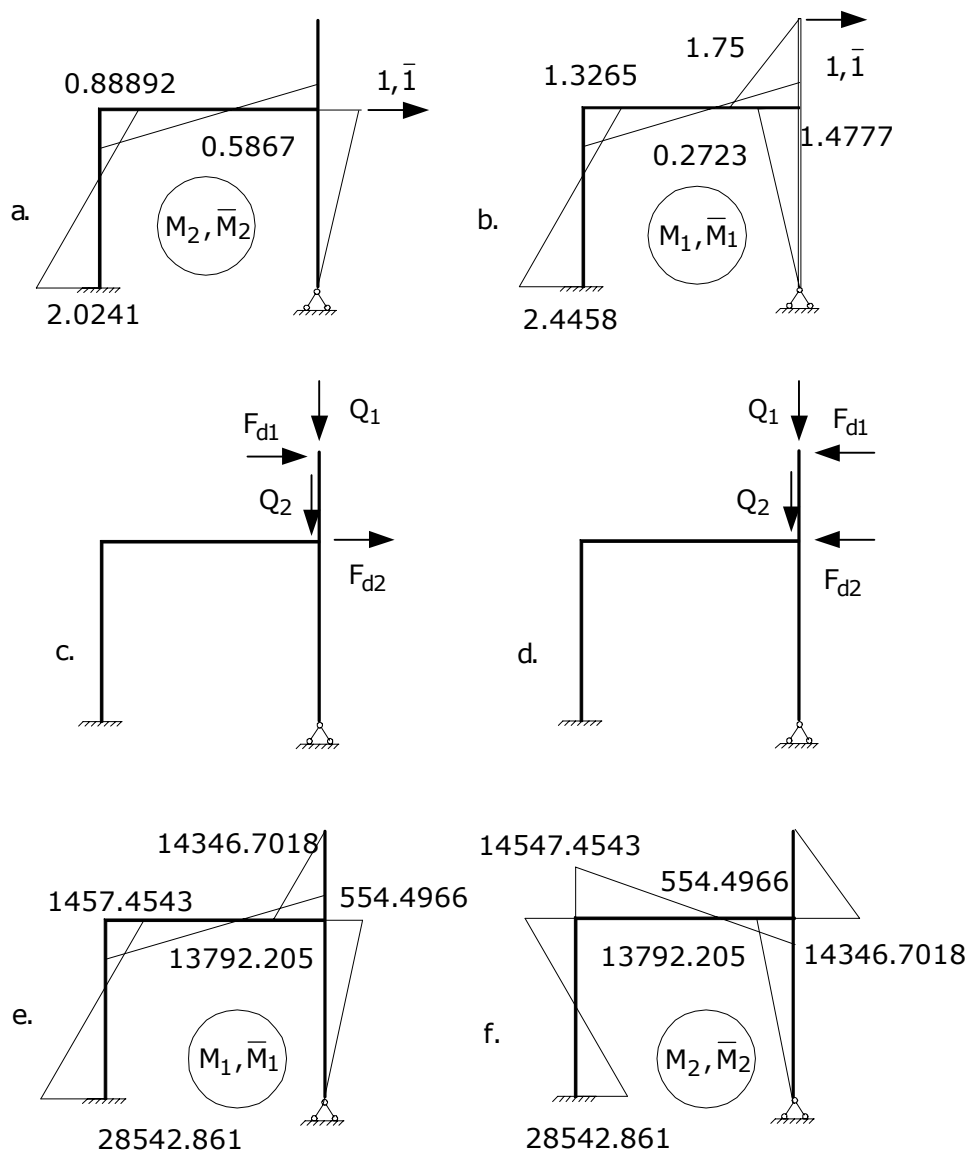


Fig.4.4

Aplicația 4.2

1. Constituirea matricei de inerție, [m]

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{bmatrix} = 2,29 \cdot 10^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{bmatrix} \quad (\text{kg})$$

2-3. Determinarea matricei de rigiditate, [K]

Conform situațiilor de încărcare prezentate în figura 4.5, prin aplicarea metodei deplasărilor rezultă următoarea matrice de rigiditate:

$$[k] = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 34,0503 & -8,7935 \\ -8,7935 & 6,14 \end{bmatrix}.$$

4. Calculul pulsațiilor proprii, ω_i

Prin rezolvarea ecuației caracteristice, se obțin pulsațiile proprii ale sistemului vibrant cuprinse în matricea spectrală:

$$[\omega^2] = \frac{EI}{mh^3} \begin{bmatrix} 2,4614 & 0 \\ 0 & 35,6822 \end{bmatrix}$$

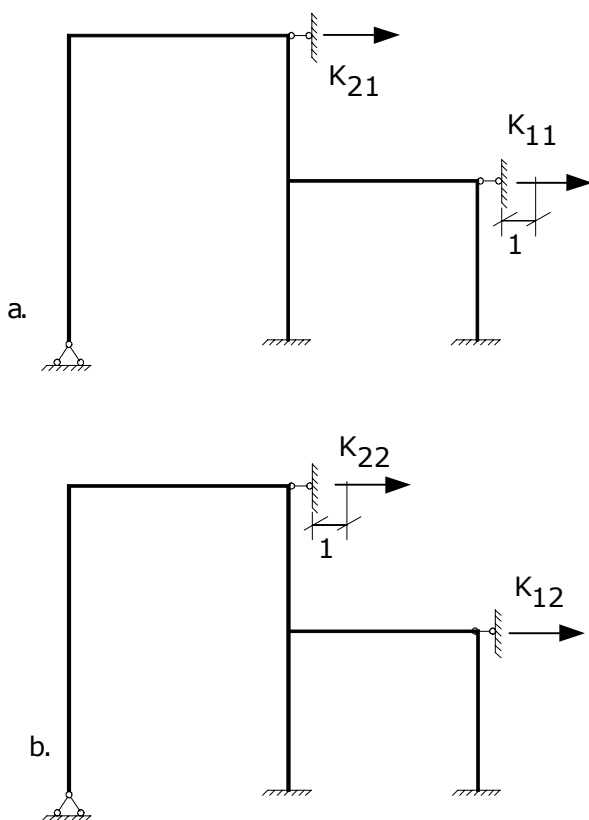


Fig.4.5

5. Verificarea condiției de rezonanță, $\theta = \omega_i$

Pentru valoarea pulsației forțelor perturbatoare $\theta = 30 \text{ rad s}^{-1}$ rezultă:

$$\frac{\theta}{\omega_1} = 1,547; \frac{\theta}{\omega_2} = 0,4063$$

fiind verificată condiția pentru evitarea fenomenului de rezonanță

$$0,7 \geq \frac{\theta}{\omega_i} \geq 1,3$$

6a. *Constituirea matricei amplitudinilor forțelor*

$$\{F_0\} = \begin{Bmatrix} F_{0,1} \\ F_{0,2} \end{Bmatrix} = 10^4 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ (N)}$$

6b. *Constituirea vectorului amplitudinilor forțelor perturbatoare*

$$\{F_0\} = \begin{Bmatrix} F_{0,1} \\ F_{0,2} \end{Bmatrix} = 10^4 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ (N)}.$$

7. *Determinarea vectorului, $\{R_0\}$*

Forțele perturbatoare acționând în dreptul maselor și pe direcția GLD, rezultă:

$$\{R_0\} = \begin{Bmatrix} R_{0,1} \\ R_{0,2} \end{Bmatrix} = -\{F_0\} = -10^4 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ (N)}.$$

8. *Calculul deplasărilor maxime, y_i*

Introducând datele calculate anterior în sistemul de ecuații al amplitudinilor deplasărilor ce se produc pe direcția GLD:

$$[k] - \theta^2[m]\{y\} + \{R_0\} = \{0\}$$

se obține sistemul:

$$\begin{cases} \left(34,0503 \frac{EI}{h^3} - 5,891025 \frac{EI}{mh^3} \cdot m \right) \cdot y_1 - 8,7935 \frac{EI}{h^3} \cdot y_2 - 10^4 = 0 \\ -8,7935 \frac{EI}{h^3} \cdot y_1 + \left(6,14 \frac{EI}{h^3} - 5,891025 \frac{EI}{mh^3} \cdot 1,5m \right) \cdot y_2 - 10^4 = 0 \end{cases}$$

ale cărui soluții sunt:

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{EI} \begin{Bmatrix} -1286,000894 \\ -5255,342334 \end{Bmatrix}.$$

9. *Determinarea forțelor dinamice maxime, F_d*

Forțele dinamice maxime se determină cu relația:

$$\{F_d\} = [k] \{y\}$$

sau:

$$\{F_d\} = \begin{Bmatrix} F_{d1} \\ F_{d2} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 34,0503 & -8,7935 \\ -8,7935 & 6,14 \end{bmatrix} \frac{h^3}{EI} \begin{Bmatrix} -1286,000894 \\ -5255,342334 \end{Bmatrix}$$

și

$$\{F_d\} = \begin{Bmatrix} 2424,136573 \\ -20959,35307 \end{Bmatrix}, \text{ (N).}$$

10. Determinarea răspunsului dinamic în eforturi

Acționând sistemul oscilant cu forțele dinamice obținute mai sus, Fig.4.6 se vor trasa prin metodele Staticii Construcțiilor, diagramele maxime și minime, figura 4.7.

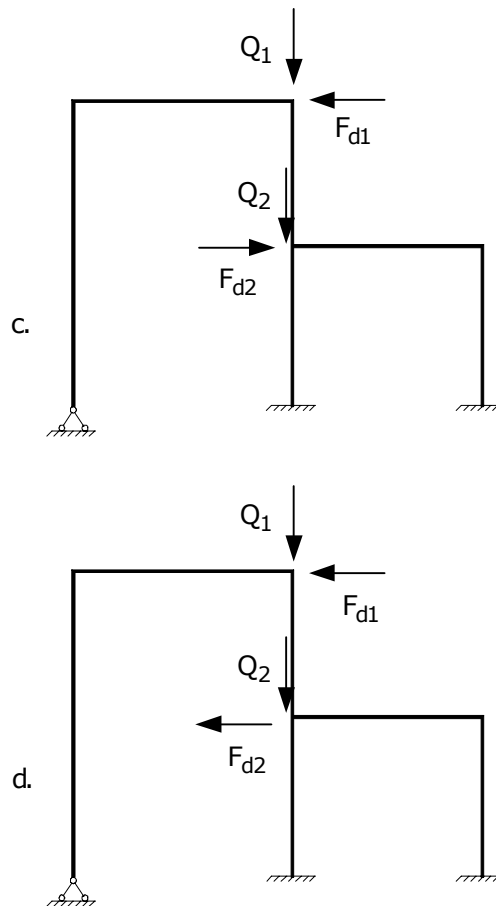


Fig.4.6

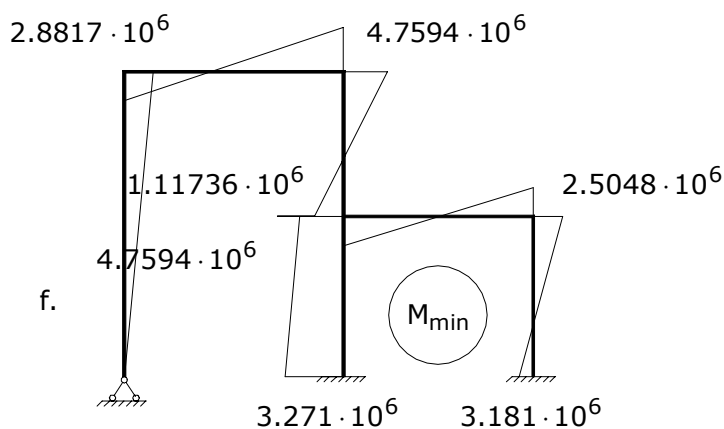
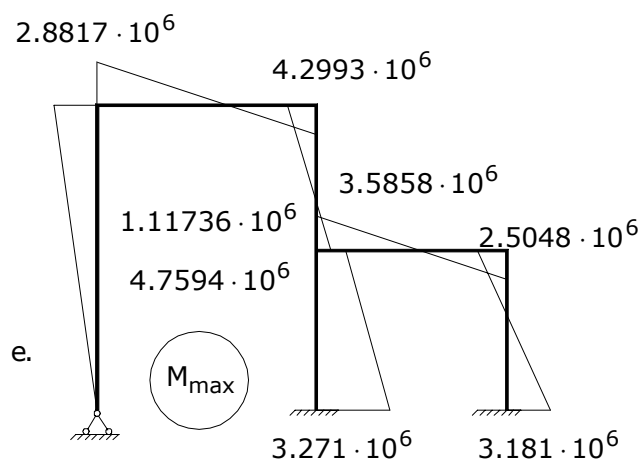


Fig.4.7

Aplicația 4.3

1. Constituirea matricei de inerție, [m]

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1,3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2,29 \cdot 10^4 \begin{bmatrix} 1,3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, (\text{kg}).$$

2-3. Determinarea modurilor proprii de vibrație

Utilizând diagramele de eforturi trasate în figura 4.8, matricea de flexibilitate va avea forma:

$$[\Delta] = \frac{1^3}{6EI} \begin{bmatrix} \frac{41}{112} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{88} & \frac{81}{81} \end{bmatrix},$$

iar matricea de rigiditate:

$$[k] = [\Delta]^{-1} = \frac{6EI}{1^3} \cdot \frac{1}{3160} \begin{bmatrix} 9856 & 2016 \\ 2016 & 3321 \end{bmatrix}$$

Prin rezolvarea ecuației caracteristice se determină matricea spectrală:

$$[\omega^2] = \frac{EI}{m1^3} \begin{bmatrix} 5,0939323 & 0 \\ 0 & 15,60709 \end{bmatrix}$$

iar soluțiile ecuațiilor formelor proprii adimensionale constituie matricea modală:

$$[y] = \begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{2,1} & y_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,3165653 & 2,4299277 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Verificarea condiției de rezonanță

Pentru valoarea pulsației forței perturbatoare $\theta = 30 \text{ rad s}^{-1}$ rezultă:

$$\frac{\theta}{\omega_1} = 2,24921, \frac{\theta}{\omega_2} = 1,049$$

Cel de-al doilea raport nu respectă condiția:

$$0,7 \geq \frac{\theta}{\omega_i} \geq 1,3,$$

rezultă că amortizarea sistemului oscilant trebuie luată în considerare la determinarea forțelor dinamice și în consecință vom utiliza analiza modală.

5. Determinarea factorilor de amplificare dinamică, μ_i

Factorul de amplificare dinamică, pentru:

$$\theta = 30 \text{ rads}^{-1}, \theta^2 = 17,175 \frac{EI}{m1^3},$$

corespunzător primului mod de vibrație, se determină cu relația:

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}\right)^2 + 4\nu^2 \frac{\theta^2}{\omega_1^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{17,175 \frac{EI}{m}}{5,0939323 \frac{EI}{m}}\right)^2 + 4 \cdot 0,05^2 \frac{17,175 \frac{EI}{m}}{5,0939323 \frac{EI}{m}}}}$$

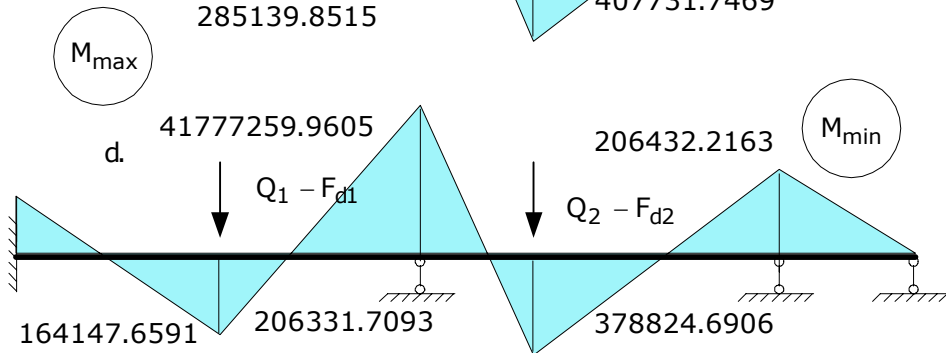
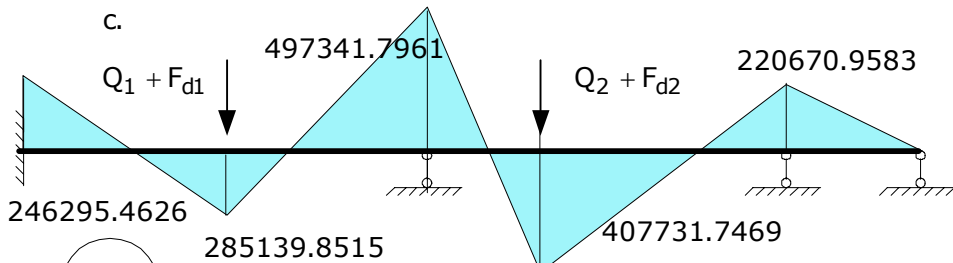
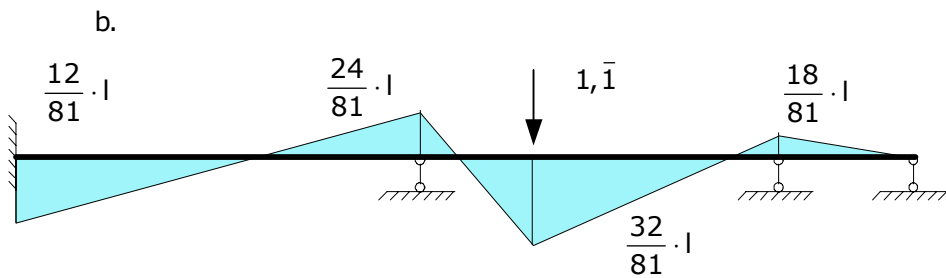
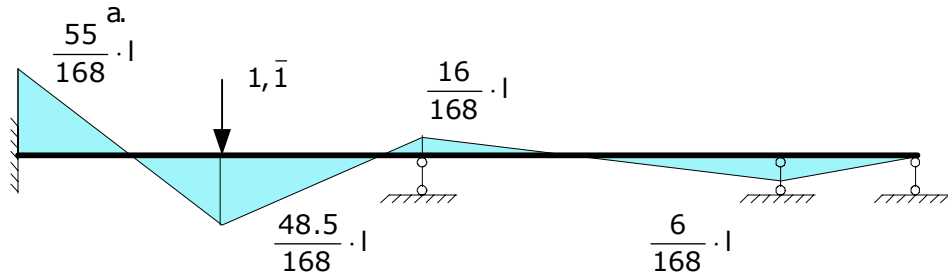


Fig. 4.8

și prin efectuarea calculelor, rezultă:

$$\mu_1 = 0,420387784.$$

Pentru cel de-al doilea mod propriu de vibrație, rezultă:

$$\mu_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_2^2}\right)^2 + 4\nu^2 \frac{\theta^2}{\omega_2^2}}} = 6,884756168.$$

6. Calculul deplasărilor maxime, y_j .

Deplasarea ce se produce pe direcția primului grad de libertate dinamică se determină cu relația:

$$y_1 = y_{1,1} \frac{y_{1,1}F_{0,1} + y_{2,1}F_{0,2}}{\omega_2^2(m_1y_{1,1}^2 + m_2y_{2,1}^2)} \cdot \mu_1 + y_{1,2} \frac{y_{1,2}F_{0,1} + y_{2,2}F_{0,2}}{\omega_2^2(m_1y_{1,2}^2 + m_2y_{2,2}^2)} \cdot \mu_2$$

și prin introducerea datelor numerice se obține:

$$y_1 = 1,1873259 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

Deplasarea măsurată pe direcția GLD rezultă:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_{2,1} \frac{y_{1,1}F_{0,1} + y_{2,1}F_{0,2}}{\omega_2^2(m_1y_{1,1}^2 + m_2y_{2,1}^2)} \cdot \mu_1 + y_{2,2} \frac{y_{1,2}F_{0,1} + y_{2,2}F_{0,2}}{\omega_2^2(m_1y_{1,2}^2 + m_2y_{2,2}^2)} \\ &= 7,671761 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{aligned}$$

7. Determinarea forțelor dinamice maxime, F_d

$$\{F_d\} = \begin{Bmatrix} F_{d,1} \\ F_{d,2} \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30187,39235 \\ 11258,97914 \end{Bmatrix} \text{ (N)}$$

8. Calculul răspunsului dinamic în eforturi

Diagramele finale sunt trasate în figura 4.7.c și d.

PROBLEME PROPUSE 6

SISTEME CU n GLD - VIBRAȚII LIBERE ȘI FORȚATE

Probleme propuse spre rezolvare:

2.1 Să se determine modurile proprii de vibrație pentru sistemele desenate în continuare.

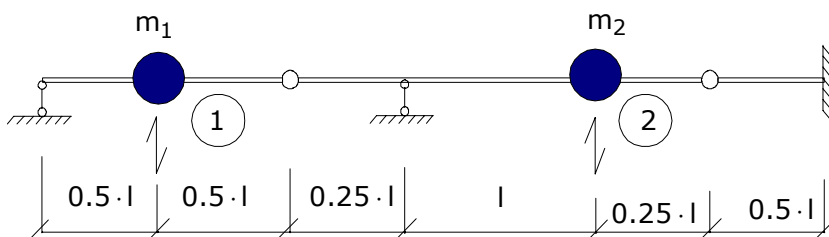


Fig.2.1

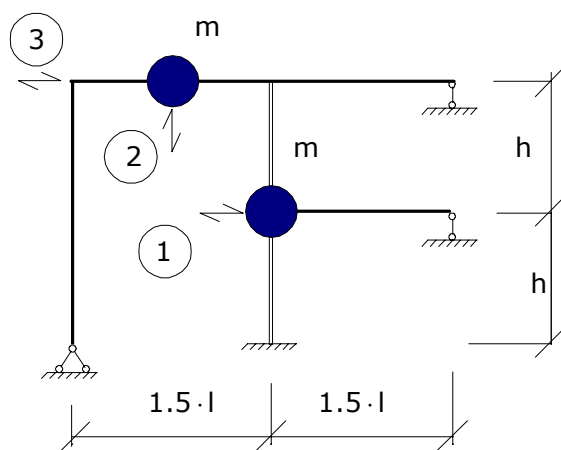


Fig.2.2

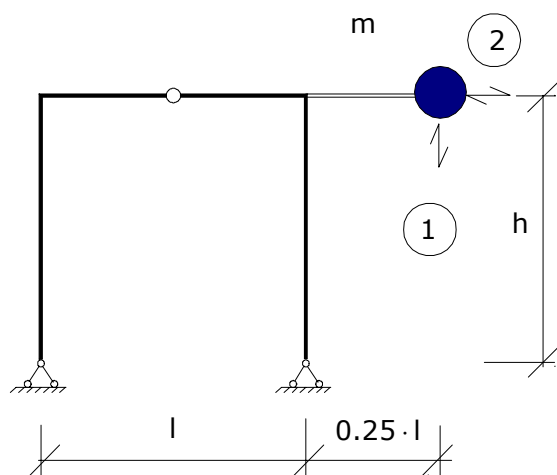


Fig.2.3

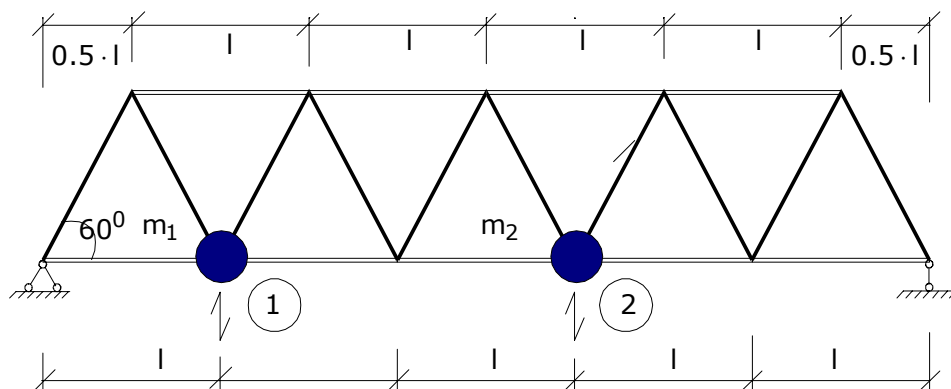


Fig.2.4

2.2 Să se traseze diagramele M , T , N , maxime și minime pentru sistemele dinamice prezentate mai jos.

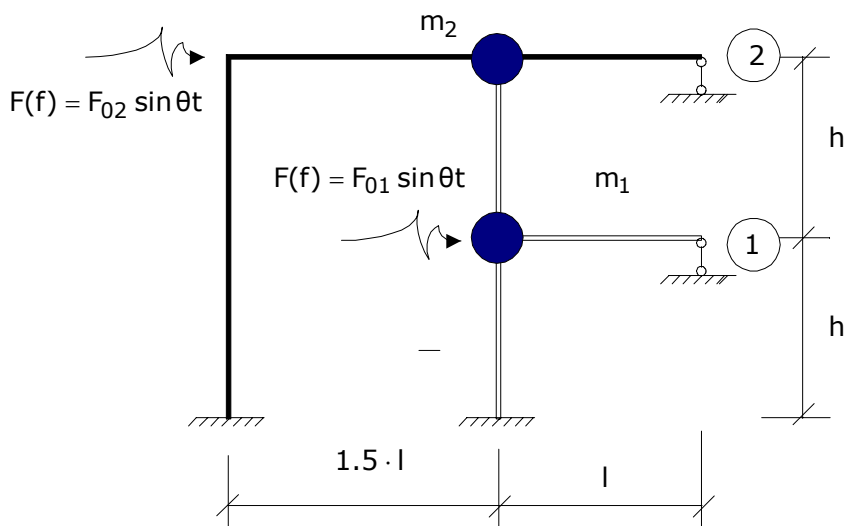


Fig.2.5

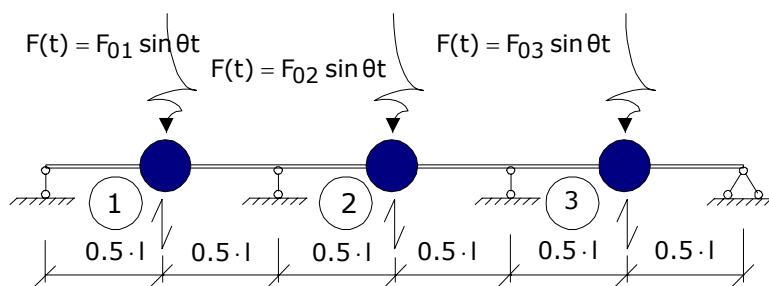


Fig.2.6

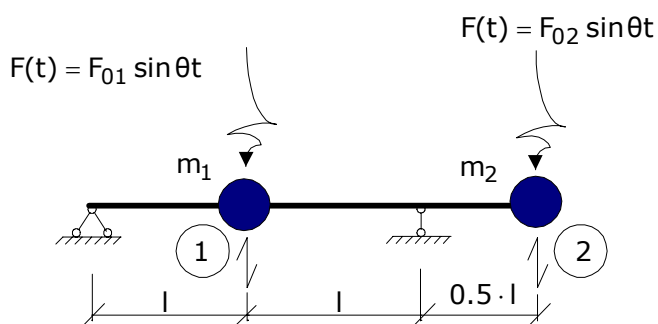


Fig.2.7

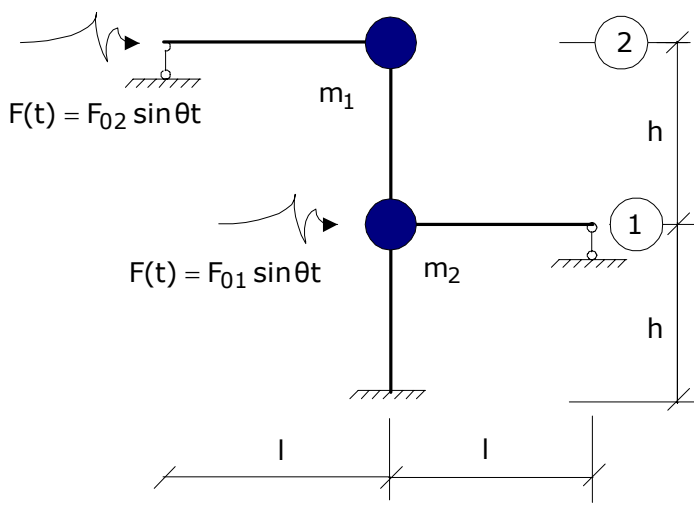


Fig.2.8

BIBLIOGRAFIE **B**

1. Bănuț, V., Calculul neliniar al structurilor, Editura Tehnică, București, 1981.
2. Bănuț, V., Popescu, H., Stabilitatea structurilor elastice, Editura Academiei R.S.R., București, 1975.
3. Bălan, Șt., Mihăilescu, N. Șt., Istoria științei și tehnicii în România. Date cronologice., Editura Academiei R.S.R., București, 1985.
4. Bălan, Șt., ș.a., Dicționar cronologic al științei și tehnicii universale, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1979.
5. Bârsan, G.M., Dinamica și stabilitatea construcțiilor, EDP, București, 1979.
6. Bigs, J.M., Introduction to Structural Dynamics, McGraw-Hill Books Company, New York, 1964.

7. Bratu, Polidor, Vibrațiile sistemelor elastice, Editura Tehnică, București, 2000.
8. Buzdugan, Gh., Fetcu, L., Radeș, M., Vibrații mecanice, EDP, București, 1979.
9. Buzdugan, Gh., Mihăilescu El., Radeș, M., Măsurarea vibrațiilor, Editura Academiei R.S.R., București, 1979.
10. Buzdugan, Gh., Izolarea antivibratilă a mașinilor, Editura Academiei R.S.R., București, 1980.
11. Buzdugan, Gh., Dinamica fundațiilor de mașini, Editura Academiei R.S.R., București, 1968. Silaș, Gh. ș.a., Culegere de probleme de vibrații mecanice, vol. I, Sisteme liniare cu un număr finit de grade de libertate, Editura Tehnică, București, 1967.
12. Bratu, P.P., Izolarea și amortizarea vibrațiilor la utilaje de construcții, INCERC București, 1982.
13. Caracostea, A., ș.a., Manual pentru calculul construcțiilor, Vol.I, Bazele teoretice de calcul al construcțiilor, Editura Tehnică, București, 1977.
14. Chiriacescu, Sergiu T., Dinamica mașinilor unelte. Prolegomene, Editura Tehnică, București, 2004.
15. *** Culegere de probleme de mecanică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1974.
16. Dicționar de mecanică, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1980.
17. Darabont, Al., Iorga, I., Văiteanu, D., Simanschevici, H., Șocuri vibrații. Aplicații în tehnică, Editura Tehnică, București, 1988.
18. Darabont, Al., Iorga, I., Cihodaru, M., Măsurarea zgomotului și vibrațiilor în tehnică, Editura Tehnică, București, 1983.
19. Filimon, I., Soare, M., Ecuații diferențiale cu aplicații în mecanica construcțiilor, Editura Tehnică, București, 1983.
20. Gheorghiu, Al., Statica construcțiilor, Vol.III, Formulări și metode matriceale în statica liniară. Comportarea și calculul nelinier al structurilor., Editura Tehnică, București, 1980.
21. Gioncu, V., Ivan, M., Bazele calculului structurilor la stabilitate, Editura Facla, Timișoara, 1983.
22. Hangan, S., Crainic, L., Concepte și metode energetice în dinamica construcțiilor, Editura Academiei R.S.R., București, 1980.
23. Harris, C., Crede, Ch., Șocuri și Vibrații, vol. I, II și III, Editura Tehnică, București, 1968.
24. Ifrim, M., Dinamica structurilor și inginerie seismică, EDP, București, 1984.
25. Ifrim, M., Aplicații în Analiza Dinamică a Structurilor și Inginerie Seismică, EDP, București, 1974.
26. Ilie, Gh., Fierbințeanu, V., Stănilă, N., Petrescu, I., Mecanica construcțiilor, Editura Tehnică, București, 1987.

27. Ispas, C., Simion, F.-P., *Vibrațiile mașinilor – unelte. Teorie și aplicații*, Editura Academiei R.S.R., București, 1986.
28. Ixaru, L. Gr., *Metode numerice pentru ecuații diferențiale cu aplicații*, Editura Academiei R.S.R., București, 1979.
29. Marinov., R., *Probleme de stabilitate dinamică în construcții*, EDP, București, 1985.
30. Massonnet, Ch., ș.a., *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, Editura Tehnică, București, 1974.
31. Mihiu, C., *Metode numerice în algebra liniară*, Editura Tehnică, București, 1977.
32. Mihiu, C., *Sisteme de ecuații liniare și forme pătratice*, Editura Tehnică, București, 1985.
33. Munteanu, M., *Introducere în dinamica mașinilor vibratoare*, Editura Academiei R.S.R., București, 1986.
34. Nowacki, W., *Dinamica sistemelor elastice*, Editura Tehnică, 1969.
35. Olariu, V., Sima, P., Achiriloaie, V., *Mecanică tehnică*, Editura Tehnică, București, 1982.
36. Oprea, Gh., *Stabilitatea și calculul de ordinal II al structurilor din bare*, Editura Național, 1999.
37. Pană, T., *Absorbitori dinamici de vibrații*, Editura Tehnică, București, 1984.
38. Posea, N., *Calculul dinamic al structurilor*, Editura Tehnică, București, 1991.
39. Radeș, M., *Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice*, Editura Academiei R.S.R., București, 1979.
40. Rădoi, M., Deciu, E., Voiculescu, D., *Elemente de vibrații mecanice*, EDP, București, 1973., *Statica Construcțiilor*, EDP, București, 1972.
41. Răutu, S., Băbuț, V
42. Salvadori, M.G., Baron, M.L., *Metode numerice în tehnică*, Editura Tehnică, București, 1972.
43. Sandi, H., *Elemente de dinamica structurilor*, EDP, București, 1983.
44. Scarlat, A., *Stabilitatea și calculul de ordinul II al structurilor*, Editura Tehnică, București, 1969.
45. Scarlat, A., *Stabilitatea structurilor. Probleme speciale*, Editura Tehnică, București, 1969.
46. Silaș, Gh. ș.a., *Culegere de probleme de vibrații mecanice*, vol. II, *Sisteme neliniare și parametrice. Sisteme vibropercutante. Aplicații tehnice*, Editura Tehnică, București, 1973.
47. Silaș, Gh., *Mecanică. Vibrații mecanice*, EDP, București, 1968.
48. Silaș, Gh., Brîndeu, L., *Sisteme vibropercutante*, Editura Tehnică, 1986.
49. Simionescu, I., Dragnea, M., Moise, V., *Metode numerice în tehnică*, Editura Tehnică. *Aplicații în FORTRAN*, EDITURA TEHNICĂ, 1995.
50. Simonici, M., *Dinamica construcțiilor*, Editura Tehnică, București, 1958.

51. Soare, M., Teodorescu, P.P., Toma, I., Ecuații diferențiale cu aplicații în Mecanica Construcțiilor, Editura Tehnică, București, 1999.
52. Snitko, N.K., Dinamica construcțiilor, Editura Tehnică, București, 1965.
53. Staicu, Șt., Introducere în mecanica teoretică, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1983.
54. STAS 3451 - 73, Statica, dinamica și stabilitatea structurilor. Terminologie.
55. STAS 6488 - 73, Solicitări variabile periodice. Terminologie și simboluri.
56. STAS 10101/0 - 75. Acțiuni în construcție. Clasificarea și gruparea acțiunilor.
57. STAS 101001/OB - 77, Clasificarea și gruparea acțiunilor pentru poduri de cale ferată și șosea.
58. STAS 10101/1 - 75, Acțiuni în construcție. Greutăți tehnice și încărcări permanente.
59. STAS 1489 - 75, Poduri de cale ferată. Acțiuni.
60. STAS 1545 - 63, Poduri pentru străzi și șosele. Pasarele. Sarcini.
61. STAS 3220 - 65, Sarcini în construcții. Poduri de cale ferată. Convoaie tip.
62. STAS 3221 - 63, Poduri pentru străzi și șosele. Convoaie tip și clase de încărcare.
63. STAS 737/1 - 72, Sistemul Internațional de unități (SI). Unități fundamentale și unități suplimentare.
64. STAS 737/2 - 72, Sistemul Internațional de unități (SI). Unități derivate.
65. STAS 737/3 - 72, Sistemul Internațional de unități (SI). Reguli de formare și scriere a unităților SI.
66. STAS 737/4 - 72, Sistemul Internațional de unități (SI). Prefixe pentru formarea multiplilor și submultiplilor zecimali ai unităților SI.
67. STAS 737/8 - 72, Sistemul Internațional de unități (SI). Mărimi caracteristice mecanicii. Unități de măsură.
68. STAS 9446 - 73, Unități de măsură care nu fac parte din sistemul Internațional de unități (SI). Unități tolerate.
69. Teodorescu, P.P., Dinamica corpurilor liniar elastice, Editura Academiei R.S.R., București, 1972.
70. Jăposu, I., Mecanică analitică și vibrații, Teorie și probleme, Editura Tehnică, București, 1998.
71. Vâlcovici, V., Bălan, Șt., Voinea, R., Mecanică teoretică, Editura Tehnică, București, 1968.